MATEMÁTICA FINANCEIRA

João Carlos dos Santos

Calculadora HP-12C

Mais de 200 Problemas Solucionados

Série Análise de Negócios - Vol. 1

COLEÇÃO SAPIENTIA

ARTE & CIÊNCIA
Villipress

João Carlos dos Santos

Matemática Financeira

Com a calculadora HP-12C

Mais de 200 Problemas Solucionados

Primeira Edição
2001

João Carlos dos Santos

Matemática Financeira

Com a calculadora HP-12C

Mais de 200 Problemas Solucionados

Coleção Sapientia - Série Análise de Negócios - Vol. 01

Arte Ciência

Villipress editora

São Paulo
2 0 0 1

Direção Geral
Henrique Villibor Flory
Editor e Projeto Gráfico
Karel Henricus Langermans
Arte-Final e Diagramação
K. Langer
Capa
K. Langer

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Catalogação na fonte: Acácio J. Santa Rosa, CRB-8/157)

SANTOS, João Carlos.
Matemática Financeira-I ¾ com a calculadora HP-12C. (Série: Análise de Negócios) / João Carlos dos Santos; São Paulo: Arte & Ciência, 2001

ISBN 85-7473-044-0

1.Matemática financeira 2. Juros 3. Operações com títulos públicos 4. Sistemas de Amortizações 5. Análise de negócios 6. Investimentos 7. Calculadora HP-12C.

CDU: 650.0
(650.0153)

Índice para catálogo sistemático:

Editora Arte & Ciência - Villipress
Rua Treze de Maio, 71 – Bela Vista
São Paulo – SP - CEP 01327-000
Tel/fax: (011) 257-5871
Na internet: **http://www.arteciencia.com.br**

À minha esposa, que tanto me incentivou
para que este trabalho fosse publicado.

Índice

PREFÁCIO

As notas de aulas escritas dos anos anteriores em que lecionamos a disciplina de Matemática Financeira, bem como as questões levantadas pelos alunos em sala de aula - que abrangem mercado financeiro, bancos e comércio - deram origem a este trabalho. Nele, procuramos prezar pela clareza e objetividade, evitando a linguagem formal da matemática, uma vez que está direcionado para cursos de áreas gerenciais.

Os conceitos apresentados estão totalmente em sintonia com o contexto brasileiro, o que torna a assimilação muito mais eficiente do que livros que foram traduzidos para o nosso idioma, por exemplo.

Procuramos apresentar a teoria de modo independente da operacionalidade da calculadora HP-12C, porque acreditamos que ensinar esta disciplina não é ensinar a apertar teclas. No entanto, a teoria, no que se refere aos conceitos e fórmulas, está toda casada com os recursos desta calculadora, de modo a permitir ao aluno grande economia de tempo e dinamismo na sala de aula. Além do mais, a Matemática Financeira não é praticada hoje sem o auxílio das calculadoras e das planilhas de cálculo. Hoje, encontramos nas livrarias muitos livros de Matemática Financeira que trazem apêndices sobre o manuseio de calculadoras financeiras e de planilhas eletrônicas, mas poucos apresentam suas ferramentas ao mesmo tempo em que ensina os tópicos da disciplina.

O livro está dividido em 7 capítulos. Cada um apresenta uma introdução ao assunto que vai ser discutido, onde procuramos ressaltar a importância do mesmo frente às exigências do mercado de trabalho. Depois disso, vêm as seções, contendo a teoria, as fórmulas e a operacionalidade da HP-12C. Todos os exercícios possuem respostas, o que facilita a auto-aprendizagem.

Sinopse deste livro

O capítulo 1 apresenta os primeiros conceitos da Matemática Financeira, o indispensável para um entendimento dos capítulos subseqüentes.

O capítulo 2 é uma pequena introdução aos recursos operacionais da calculadora HP-12C. Lá estão reunidas informações técnicas de operação desta máquina, exceto no que se refere aos cálculos financeiros, que serão apresentados juntamente com suas teorias nos capítulos seguintes.

O capítulo 3 apresenta os juros simples e uma coleção de exemplos onde são aplicados no mercado brasileiro.

O capítulo 4 discorre sobre os juros compostos, através de problemas de fácil assimilação.

O capítulo 5 se esmera em diferenciar as inúmeras taxas que existem no mercado, tais como nominais, efetivas, reais e de inflação.

O capítulo 6 estuda os parcelamentos e com eles os diferentes sistemas e modos de amortização de uma dívida.

O capítulo 7 trata dos principais investimentos no mercado financeiro brasileiro.

O presente volume pode servir como texto de apoio para o primeiro semestre letivo de Matemática Financeira nos cursos de Administração, Contabilidade e Economia. O segundo volume trata de ferramentas para análises de investimentos, tais como taxa interna de retorno, valor presente líquido, payback, e poderá ser usado num segundo semestre letivo desta disciplina.

Agradecemos desde já as críticas que poderão tornar este livro melhor no que se refere à sua objetividade, clareza, edição, etc. As mesmas poderão ser encaminhadas à editora.

Março de 2.001.
João Carlos dos Santos

1. Primeiros Conceitos

1.1 Introdução

Neste capítulo, reunimos os elementos presentes na maioria dos contextos onde a Matemática Financeira se aplica. Tópicos como as terminologias usadas em investimentos, a diferença básica entre os regimes de juros simples e compostos, as notações usadas para prazos e taxas percentuais e ainda o conceito de diagramas de fluxos de caixa. A importância dos mesmos dispensa justificativas, visto que será demonstrada em capítulos seguintes a partir de seus empregos em situações diversas.

1.2 Noções Básicas

Como em todos os ramos do conhecimento humano, em Matemática Financeira existem noções que são consideradas básicas, por estarem presentes na maioria das situações onde a mesma se aplica. Vamos apresentá-las através da seguinte ilustração: Um investimento de R$ 100,00 retornou R$ 140,00 ao seu investidor. Assim, temos que:

O *valor principal* ou simplesmente *principal* é o dinheiro que possibilitou a transação financeira, que é o de R$ 100,00.

O *montante* ou *valor* futuro é o valor de resgate do investimento, que é o de R$ 140,00.

Os *juros* ou *rendimento* é a diferença entre o que a pessoa recebeu (montante) e o que a mesma aplicou (principal), em valores monetários. No exemplo, é de R$ 40,00.

A *taxa de juros* é a divisão entre os juros recebidos e o capital principal.

quadro 1.1

$$\text{taxa de juros} = \frac{\text{juros}}{\text{principal}} = \frac{40}{100} = 0{,}40$$

quadro 1.2

Em porcentagem, teremos uma taxa de juros de 40% (basta multiplicar por 100). Logo, *a taxa de juros é tão somente a divisão entre os juros e o capital principal*. Note a diferença conceitual entre juros e taxa de juros: Juros é o valor do acréscimo em moeda, enquanto que taxa de juros é o quanto este acréscimo em moeda representa sobre o principal da transação.

Na sua opinião, a aplicação deste exemplo é um bom investimento ou não? Você terá acertado se afirmou que vai depender do tempo de espera ou do *prazo da aplicação*. Por exemplo, nos dias de hoje (início do ano 2.001), se a espera for de 1 mês, a aplicação é excelente, mas se for de 10 anos, não se poderá dizer o mesmo. Logo, a taxa de juros, por si só, não informa muita coisa se não vier acompanhada da unidade de tempo. Então, se o prazo fosse de um mês, teríamos uma taxa de juros de 40% ao mês, enquanto que se o prazo fosse de 10 anos, teríamos uma taxa de juros de 40% à década!

1.3 Taxas de Investimento e de Desconto

Existem situações onde ocorre a confusão entre os conceitos destas duas taxas. Por hora, vamos dizer que a *taxa de investimento* leva em conta o principal da operação como base de cálculo. No exemplo anterior, temos que 40% era uma taxa de investimento, já que a base de seu cálculo foi o capital principal envolvido: juros de R$ 40,00 eqüivalem a 40% do principal de R$ 100,00. A taxa de investimento é simplesmente denominada taxa de juros.

Por outro lado, a *taxa de desconto* leva em consideração o valor futuro como referência. No exemplo anterior, a taxa de desconto será de 28,57%. Veja o porquê: juros de R$ 40,00 eqüivalem a 28,57% do montante de R$ 140,00.

Esta confusão é usada com freqüência no mercado para ludibriar os mais desatentos. Veja o exemplo a seguir.

Exemplo 1.1

Uma camisa é anunciada por R$ 50,00 com um cheque para 30 dias ou com um desconto de 20% à vista. Qual será a taxa de juros (de investimento) mensal cobrada pela loja?

Solução:

O preço da camisa à vista é de 50 – 20% = 40 reais. Logo, se alguém compra algo no valor de R$ 40,00, mas só paga daqui a 30 dias o valor de R$ 50,00, estará pagando R$ 10,00 de juros. Então,

$$\text{taxa de juros} = \frac{\text{juros}}{\text{principal}} = \frac{10}{40} = 25\%$$

quadro 1.3

Então, a taxa de juros (de investimento) mensal será de 25% e não de 20% (que é a taxa de desconto), o que muitos poderiam pensar.

Existe uma fórmula que relaciona taxas de investimento e de desconto:

$$i = \frac{i_D}{1 - i_D}$$

quadro 1.4

onde:
i é a taxa de investimento
i_D é a taxa de desconto

1.4 Juros Simples x Juros Compostos

Um investimento de R$ 100,00 é feito segundo uma taxa de juros de 10% ao mês. Conforme os regimes a serem adotados, teremos os seguintes montantes ao longo dos meses:

regime	mês 1	mês 2	mês 3	mês 4
simples	110,00	120,00	130,00	140,00
composto	100,00	121,00	133,10	146,41

tabela 1.1

No regime dos juros simples, a taxa de juros incidirá sempre sobre o valor principal. Sendo assim, os juros simples em todos os meses serão iguais a 10% de R$ 100,00, isto é, R$ 10,00. Por outro lado, no regime dos juros compostos, a taxa de juros incidirá sempre sobre o montante do mês anterior. Noutras palavras, a taxa de juros leva em conta o capital corrigido. Assim, no primeiro mês, temos que os juros serão de 10% de R$ 100,00, o que eqüivalem a R$ 10,00. Com isso, o montante fica em R$ 110,00. Já no mês seguinte, os juros serão calculados como 10% de R$ 110,00, o que resulta em R$ 11,00. Assim, o montante irá a R$ 121,00. Para os meses seguintes, utiliza-se o mesmo princípio de cálculo. Colocando isso de uma forma mais clara:

Juros simples: Mês n : 10% de R$ 100 = R$ 10,00 Juros compostos: Mês 1 : 10% de R$ 100 = R$ 10,00 Mês 2 : 10% de R$ 110 = R$ 11,00 Mês 3 : 10% de R$ 121 = R$ 12,10 etc.

quadro 1.5

A maior facilidade do uso do *regime simples* é a de que os juros são calculados uma única vez, enquanto que no *regime composto* em cada período teremos juros diferentes. Com isso, uma taxa simples de 10% ao mês eqüivale a uma taxa simples de 20% ao bimestre, 30% ao trimestre, etc. Por outro lado, uma taxa composta de 10% ao mês eqüivale a uma taxa composta de 21% ao bimestre, 33,10% ao trimestre, etc. Logo, converter taxas simples é um processo que envolve apenas multiplicação, enquanto que taxas compostas envolvem outras operações a serem estudadas no capítulo 4 deste livro.

Juros simples são largamente usados em países em que a inflação é muito baixa, ou em contextos em que as taxas de juros anuais são muito pequenas, pois nestes casos, a perda ao longo dos tempos é relativamente insignificante. Por exemplo, considere uma inflação de 0,5% a.a. e as correções anuais de R$ 100,00:

regime	mês 1	mês 2	mês 3	mês 4
simples	100,50	101,00	101,50	102,00
composto	100,50	101,00	101,51	102,02

tabela 1.2

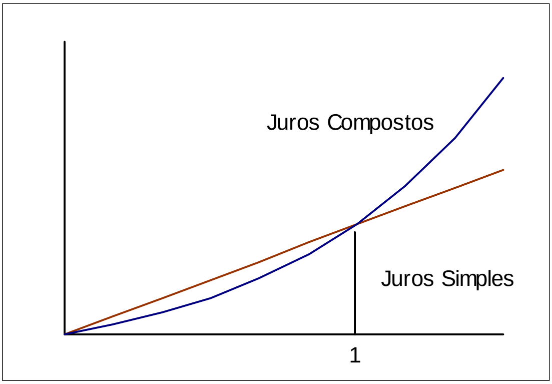
Percebemos que as diferenças entre os dois regimes de cálculo que aparecem até 2 anos são mínimas (o que nem chega a afetar a casa dos centavos) porque a taxa de juros é baixa.

Juros simples também são usados quando a unidade do prazo da aplicação for menor do que a da taxa. Neste caso, juros simples *são* mais agressivos do que os compostos. No Brasil, os bancos calculam os juros de excessos em conta corrente (cheque especial) baseando-se neste regime - prazo em dias, mas taxa de juros mensal. Por exemplo, se uma conta corrente ficou negativa de R$ 100,00 e o banco cobra uma taxa de juros de 10% ao mês, teríamos os seguintes juros:

regime	15 dias	20 dias	30 dias	40 dias
simples	5,00	6,67	10,00	13,33
composto	4,88	6,56	10,00	13,55

tabela 1.3

Observe o gráfico a seguir. Enquanto que os juros simples aumentam segundo uma linha reta, os juros compostos aumentam segundo uma curva chamada parábola. Observe que antes do ponto de encontro, os juros simples são maiores do que os compostos (pois a linha reta se encontra acima da parábola), conforme havíamos mostrado em números. Quando o prazo é unitário, há a coincidência dos juros, o que é mostrado pelo encontro da reta dos juros simples com a parábola dos compostos. No entanto, os juros compostos ultrapassam os simples após o este ponto de encontro, como vemos a parábola acima da reta a partir daí.



quadro 1.6

Assim, entende-se o motivo da preferência do regime simples, principalmente porque em geral as contas ficam negativas num prazo inferior ao de um mês - ocasião em que os juros simples superam os compostos. Os juros simples foram calculados considerando uma proporção direta. Por exemplo, 10% em um mês eqüivale a 5% em quinze dias, 6,67% em 20 dias, 13,33% em quarenta dias. Já o cálculo dos juros compostos não obedece a este tipo de raciocínio, e veremos os seus mecanismos no capítulo 5.

1.5 Notação para Prazos e Taxas

Neste curso, vamos usar abreviaturas para prazos e taxas, o que simplifica a escrita, além de também serem adotadas pelos bancos, no comércio, no mercado financeiro, etc. As tabelas 1.4 contêm os principais prazos e suas abreviaturas:

prazos	abreviaturas
dia	d.
semana	sa.
quinzena	qi.
mês	m.
bimestre	b.

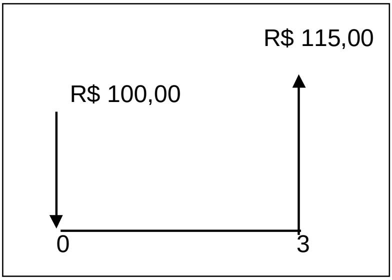
prazos	abreviaturas
trimestre	t.
quadrimestre	q.
semestre	s.
ano	a.

tabelas 1.4

As abreviaturas para taxas terão a letra a com um ponto antes das abreviaturas para os prazos. Assim, 5% ao mês será denotado por 5% a.m., 19% ao semestre será 19% a.s., 0,4% ao dia será 0,4% a.d., etc.

1.6 Diagrama de Fluxos de Caixa

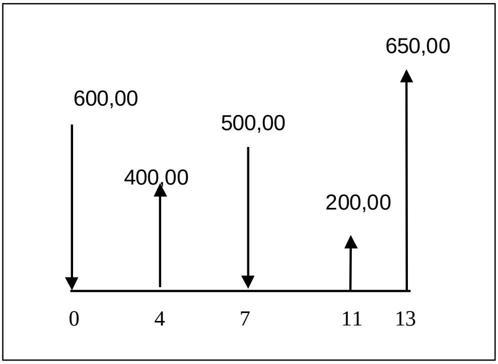
O conceito de *fluxos de caixa* (*cashflow,* em inglês) é muito ilustrativo em Matemática Financeira e vale a pena estudá-lo, já que todas as operações financeiras podem ser representadas por eles de uma forma simples, elegante e sintética. A palavra fluxo nos dá a idéia de movimento, de dinamismo. A palavra caixa contém a idéia de capital, de dinheiro. Assim, uma possível expressão sinônima para fluxo de caixa seria *movimento de capital*. O movimento de capital a cada período, então, é considerado um *fluxo de caixa*. Assim, ao longo de um certo prazo, poderemos ter vários fluxos de caixa, o que representaremos através de um *diagrama de fluxos de caixa*. Vamos ilustrar o exemplo do investimento de R$ 100,00 que retornou R$ 115,00 após 3 meses:



quadro 1.7

De uma forma geral, um diagrama é composto de uma linha horizontal - a linha do tempo - que mostra os períodos relevantes para o mesmo. Nestes períodos, temos flechas verticais que sinalizam os fluxos, respeitando-se a seguinte convenção: flechas para baixo representam fluxos de caixa de saída de capital, ao passo que flechas para cima representam fluxos de caixa de entrada de capital. No exemplo acima, na linha do tempo representamos o zero e o três, que correspondem aos meses onde houve fluxos de caixa. Uma flechinha para baixo no mês zero sinaliza uma saída de capital e o valor está acima indicado: R$ 100,00. Uma flechinha para cima no mês três indica uma entrada de capital de R$ 115,00.

Acompanhe agora um diagrama de fluxos de caixa genérico, que ilustra uma situação bastante comum nos caixas das empresas:



quadro 1.8

O mesmo deve ser interpretado da seguinte maneira: saída de R$ 600,00 na data 0, entrada de R$ 400,00 na data 4, saída de R$

500,00 na data 7, entrada de R$ 200,00 na data 11 e entrada deR$ 650,00 na data 13.

1.7 Exercícios

1) Considere o investimento de R$ 200,00 que retornou R$ 212,00 a seu investidor. Identifique:

a) o capital principal; b) o montante;

c) os juros; d) a taxa de juros;

2) Se o prazo da aplicação do exercício 1 foi de 3 meses, qual a taxa trimestral de juros? Qual o regime da aplicação (simples ou composto) considerado no cálculo destes juros?

3) Considerando ainda o exercício 1, qual a taxa de juros mensal simples da aplicação?

4) Qual das taxas abaixo melhor se aproxima da taxa mensal composta da aplicação do exercício 1?

a) 2,00% b) 1,98% c) 1,96%

d) 1,94% e) 6,00%

5) Qual a taxa de desconto trimestral do exercício 1?

6) Uma loja de eletrodomésticos anuncia que seus aparelhos são vendidos para se pagar após 60 dias sem juros. No entanto, concede um desconto de 10% para compras à vista. Qual a taxa de juros bimestral cobrada, disfarçada pelo marketing financeiro da loja?

7) Uma mercadoria é anunciada "sem juros" para se pagar daqui a 1 mês ou à vista com 15% de desconto. Qual a taxa de juros mensal cobrada?

8) Uma mercadoria é anunciada "sem juros" para se pagar daqui a 1 mês. Qual o valor do desconto à vista que embute uma taxa de 8% a.m.?

9) Qual o valor do desconto a ser concedido numa compra à vista de forma a embutir uma taxa de juros de 15% a.m. numa compra "sem acréscimo" para se pagar após 1 mês?

10) Represente os diagramas de fluxos de caixa para os exercícios:

a) 1 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9.

11) Assinale a alternativa falsa:
a) Juros e rendimento são sinônimos.
b) Juros simples possuem um comportamento linear (linha reta) enquanto que juros compostos comportam-se conforme uma parábola.
c) Juros compostos sempre são maiores que os simples, considerando a mesma taxa de juros.
d) Diagrama de fluxos de caixa resume várias informações sobre movimentações financeiras.
e) 20% a.s. significam 20% ao semestre.

12) Juros e taxa de juros são sinônimos? Explique isso através de um exemplo.

1.8 Respostas

1)
a- R$ 200,00
b- R$ 212,00
c- R$ 12,00
d- 6,00%

2) 6,00% a.t. Impossível saber se foi utilizado o regime simples ou o composto no cálculo dos juros.

3) 2,00% a.m.

4) c

5) 5,66%

6) 11,11% a.b.

7) 17,65% a.m.

8) 7,41%

9) 13,04%

11) c

2. Introdução à Calculadora HP-12C

2.1 Introdução

O presente capítulo é destinado aos novos e também aos antigos usuários da calculadora HP-12C. Recomendamos uma leitura atenta de seus tópicos, bem como a resolução dos exercícios propostos. O objetivo é o de entender o funcionamento da calculadora, além de capacitar o aluno a operá-la com destreza. Você notará que não falaremos de juros ou outros recursos financeiros da mesma. Isso porque serão ensinados juntamente com a teoria nos capítulos seguintes.

2.2 Configurações

Para ligar ou desligar

Pressione a tecla **ON**.

Para trocar o ponto decimal pela vírgula decimal (e vice-versa)

Desligue a calculadora. Agora com a tecla • (ponto) pressionada, ligue-a. Aconselho ao aluno a deixar a vírgula como separadora das casas decimais, pois este é o modo adotado no Brasil.

Para limitar o número de casas decimais

Pressione a tecla amarela **f** e, em seguida, a tecla numérica indicadora do número de casas decimais com que se deseja visualizar. Pronto. A calculadora mostrará apenas o número de casas decimais especificado. Aconselho ao aluno a utilizar 2 casas decimais (digitando **f 2**), principalmente devido aos centavos de nossa moeda. Apesar disso, a HP continuará trabalhando com 9 casas decimais em seu interior, mesmo mostrando apenas 2. Quando precisar exibir mais de duas casas decimais, digite f seguido do número necessário. Atenção: Estes procedimentos arredondam no visor o número considerado.

Pressione	Visor
f 2	0,00
8.304 ENTER	8,30
8.305 ENTER	8,31
8.306 ENTER	8,31

quadro 2.1

Observe que o número digitado foi 8,304 mas a calculadora o exibe como 8,30 (duas casas decimais). Já os outros dois valores apresentam a terceira casa decimal 5 e acima de 5 (6). Isso faz com que as segundas casas sejam arredondadas de 0 para 1 (sempre aumenta 1 unidade). A explicação do fato é que 8,306 está mais próximo de 8,310 do que 8,300. Já 8,305 por estar no meio, a máquina arredonda para cima, pois neste caso tinha que escolher aumentar ou diminuir. No entanto, em qualquer caso, a calculadora manterá o número original internamente em seus cálculos.

2.3 O Sistema de Pilha

A calculadora HP-12C trabalha com o inteligente sistema de pilha, também designado por Notação Polonesa Reversa (RPN, em inglês). Com isso, armazena os números digitados em quatro registradores, **X**, **Y**, **Z** e **W**. Assim, por exemplo, ao digitar um número, este aparecerá no visor, que é considerado o registrador **X**. Ao se pressionar a tecla **ENTER**, o número digitado passa a ocupar o registrador **Y** (entrará em **Y**) e, embora continue a aparecer no visor (registrador **X**), este é liberado para outro número. Se um outro número é digitado e pressionada a tecla **ENTER**, este irá para o registrador **Y** e o que lá estava irá para **Z**, enquanto que o visor (registrador **X**) será liberado. Isso é semelhante ao processo de empilhar objetos, como livros ou caixas, sendo que o último objeto empilhado corresponde ao registrador **X**, o penúltimo ao **Y**, o antepenúltimo ao **Z** e o anterior a este ao **W**. Vamos ilustrar com um exemplo. Toda vez que se pressiona **ENTER**, os números realizam um movimento para baixo:

Usamos a expressão *lixo* para representar qualquer valor armazenado anteriormente. As operações na HP-12C são feitas normalmente com os registradores *X* e *Y*, conforme veremos a seguir.

Pressione	**Visor**	**Registradores**
5	5	X = 5 Y = lixo Z = lixo W = lixo
ENTER	5,00	X = 5,00 Y = 5,00 Z = lixo W = lixo
2	2	X = 2 Y = 5,00 Z = lixo W = lixo
ENTER	2,00	X = 2,00 Y = 2,00 Z = 5,00 W = lixo
7	7	X = 7 Y = 2,00 Z = 5,00 W = lixo

quadro 2.2

2.4 As Quatro Operações

Enquanto a tecla **ENTER** executa um movimento de empurrar os números no sentido do registrador **W** (isto é, para baixo), as operações executam um movimento no sentido de puxar os números para o registrador **X** (ou sejam, para cima). Logo, concluímos que a tecla ***ENTER*** empurra os números no sentido do registrado **W**. Por outro lado, ao pressionar uma simples tecla de operação, digamos, a tecla **+**, a calculadora entenderá que deve somar os conteúdos dos registradores **X** e **Y** e exibir a soma no registrador **X** (que é o visor), conforme acompanhamos no quadro 2.3.

Pressione	Visor	Registradores
5	5	X = 5
		Y = lixo (1,60)
		Z = lixo (4,00)
		W = lixo (3,44)
ENTER	5,00	X = 5,00
		Y = 5,00
		Z = lixo (1,60)
		W = lixo (4,00)
2	2	X = 2
		Y = 5,00
		Z = lixo (1,60)
		W = lixo (4,00)
+	7,00	X = 7,00
		Y = lixo (1,60)
		Z = lixo (4,00)
		W = lixo (4,00)

quadro 2.3

Assim, os conteúdos anteriores irão desaparecer e toda a pilha será deslocada em sentido de *X*. Noutras palavras, enquanto a tecla **ENTER** empurra os números para baixo, as teclas de operação puxam os números para cima, fazendo os conteúdos de **X** e de **Y** desaparecerem, dando origem ao resultado da operação em **X.** O conteúdo de **Z** passa a ocupar **Y**, **W** passa ocupar ***Z*** e também é mantido em **W**.

Outros exemplos envolvendo as quatro operações básicas, que são adição, subtração, multiplicação e divisão (**+, -,** x**,** ¸ **) :**

Multiplicar 7 x 8

Pressione	Visor	Registradores
7	7	X = 7
		Y = lixo
		Z = lixo
		W = lixo
ENTER	7,00	X = 7,00
		Y = 7,00
		Z = lixo
		W = lixo
8	8	X = 8
		Y = 7,00
		Z = lixo
		W = lixo
x	56,00	X = 56,00
		Y = lixo
		Z = lixo
		W = lixo

quadro 2.4

Observe que, ao pressionar a tecla **ENTER**, o valor que estava no visor (**7**), isto é, no registrador **X** passa para o registrador **Y**, mas continua no visor, ou seja, é temporariamente mantido em **X**. Por outro lado, ao digitar o número **8**, este entrará imediatamente no registrador **X.** Finalmente, ao pressionarmos a tecla operadora da multiplicação (**x**), a máquina entenderá que desejamos multiplicar os números que estão nos registradores **X** e **Y**, eliminando estes números e substituindo-os pelo produto **56** no resgistrador **X**, isto é, no visor.

Dividir 18 ¸ 4

Pressione	Visor	Registradores
18	18	X = 18
		Y = lixo
		Z = lixo
		W = lixo
ENTER	18,00	X = 18,00
		Y = 18,00
		Z = lixo
		W = lixo
4	4	X = 4
		Y = 18,00
		Z = lixo
		W = lixo
÷	4,50	X = 4,50
		Y = lixo
		Z = lixo
		W = lixo

quadro 2.5

Observe que, primeiro, devemos armazenar os números nos registradores *X* e *Y*, e a tecla operadora é a última que apertamos.

O exemplo a seguir do quadro 2.6 ilustra o caso em que temos duas operações a serem realizadas, com diferentes prioridades. Assim, sabemos que a operação de multiplicação é prioritária sobre a adição, mas esta última aparece primeiro na expressão. Se não quisermos inverter a ordem da expressão, podemos ir armazenando os números na calculadora através da tecla **ENTER** e, em seguida, realizar todas as operações pendentes.

Calcular 3 + 4 x 5

Pressione	Visor	Registradores
3	3	X = 3 Y = lixo Z = lixo W = lixo
ENTER	3,00	X = 3,00 Y = 3,00 Z = lixo W = lixo
4	4	X = 4 Y = 3,00 Z = lixo W = lixo
ENTER	4,00	X = 4,00 Y = 4,00 Z = 3,00 W = lixo
5	5	X = 5,00 Y = 4,00 Z = 3,00 W = lixo
X	20,00	X = 20,00 Y = 3,00 Z = lixo W = lixo
+	23,00	X = 23,00 Y = lixo Z = lixo W = lixo

quadro 2.6

Observe que as operações são feitas com os registradores **X** e **Y** e, à medida que vão sendo feitas, puxam a pilha para cima: Após multiplicar **5 x 4**, a calculadora desloca o **3** que estava em **Z** para **Y**, afim de podermos somar **20 + 3.**

2.5 Exercícios

1) Considere o cálculo da expressão E = 12 – 2 x 5. Esboce um quadro similar aos apresentados, contendo, para cada tecla apertada, o visor e o conteúdo dos registradores.

2) Considere o cálculo da expressão E = 300 + 123 + 34 x 12. Esboce um quadro similar aos apresentados, contendo, para cada tecla apertada, o visor e o conteúdo dos registradores.

2.6 Teclas F e G

A tecla amarela **f** dá acesso às funções que estão em amarelo acima das teclas, enquanto que a tecla azul **g** dá acesso às funções que estão em azul abaixo das teclas.

2.7 Limpeza dos Registradores

Para limpar o visor (registrador X)

Pressione a tecla ***CLx**.*

Para limpar todos os registradores

Pressione a tecla **f** e, em seguida, a tecla que vem com o sobrescrito amarelo **CLEAR** (limpar, em inglês) **REG**. Esta tecla é a **CLx** do item anterior, mas como você apertou a tecla **f**, o que vale é o que está acima da tecla (no caso, **REG**). Esta é uma tecla considerada pertencente ao grupo **CLEAR** (**S**, **PRGM**, **FIN**, **REG**, **PREFIX**) isto é, o grupo de limpeza. Ao pressionar **CLEAR REG**, no entanto, zeramos todos os registradores **X**, **Y**, **Z** e **W**, e também os estatísticos, os financeiros e as memórias.

Para trocar os conteúdos de X e de Y

Pressione a tecla $x \gtrless y$ para trocar os conteúdos dos registradores **X** por **Y** (e vice-versa).

2.8 Memórias

Para guardar um número que está no visor, pressione a tecla **STO** (store, do inglês estocar) seguida de uma tecla numérica de **0** a **9** ou seguida da tecla (ponto) e uma tecla numérica de **0** a **9**. Para recuperá-lo, basta pressionar a tecla **RCL** (recall, do inglês recuperar) seguida do número de **0** a **9** ou de **. 0** a **. 9** digitado. Atenção: Estas memórias não são cumulativas e uma vez estocado um novo número na mesma memória, o número anteriormente armazenado será apagado.

2.9 Para Trocar o Sinal de um Número

Pressione a tecla **CHS** (*change sign*, do inglês, novo sinal) para trocar o sinal do número (de positivo para negativo e vice-versa).

2.10 Operações com Datas

Para digitar datas

Se o visor não mostrar continuamente as letras **D.MY** (day, month, year, respectivamente dia, mês, ano), é porque o sistema de datas atual é o americano (isto é, **M.DY** ou mês.dia.ano). Para mudar, pressione a tecla **g** e em seguida **D.MY**. Assim, podemos digitar datas como 18 de fevereiro de 2001 da seguinte maneira:

Pressione	Visor
18.022001	18,022001
ENTER	18,02

quadro 2.7

Note que a HP-12C admite entrada de ano com quatro dígitos. Após pressionar **ENTER**, o visor somente ficará da forma acima caso o número de casas decimais definido pela pessoa for **2**.

Para calcular o dia do vencimento

Uma nota promissória foi assinada em 12 de setembro de 2000 e venceu depois de 100 dias. Qual foi o dia de vencimento?

Pressione	Visor
12.092000 ENTER	12,09
100 g DATE	21.12.2000 4

quadro 2.8

Logo, o vencimento foi em 21 de dezembro de 2000, o quarto dia útil da semana (sinalizado pelo número 4 após a data), isto é, numa quinta-feira. Atenção para os dias da semana na HP-12C: começam na segunda-feira (1) e terminam no domingo (7). Para se calcular datas retroativas, digitamos o número de dias seguido de *CHS*, isto é, negativamos este.

Para calcular quantos dias se passaram

Uma prestação venceu em 25 de agosto de 2000 e foi paga em 18 de outubro de 2000. Calcule os dias de atraso.

Pressione	Visor
25.082000 ENTER	25,08
18.102000	18,102000
g Δ DYS	54,00

quadro 2.9

Logo, se passaram 54 dias.

2.11 Exercícios

3) Uma nota promissória foi assinada em 3 de março de 2000 e paga depois de 87 dias. Calcule a data de seu vencimento.

4) Uma prestação foi paga em 4 de março de 2000 com 44 dias de atraso. Calcule a data de seu vencimento.

5) Uma prestação venceu em 19 de janeiro de 2000 e foi paga em 11 de abril deste mesmo ano. Calcule o número de dias de atraso.

6) Em que dia da semana cairá o natal deste ano? E o dia 7 de setembro deste ano? E o seu aniversário deste ano?

2.12 Outras Operações

Para elevar à potência

3^4

Pressione	Visor
3 ENTER	3,00
4 y^X	18,102000
g Δ DYS	54,00

quadro 2.10

e^5

Pressione	Visor
5 e^x	148,41

quadro 2.11

Para elevar ao quadrado, podemos utilizar a tecla **y^x**, ou utilizar o conceito de que elevar ao quadrado é multiplicar um número por si mesmo. Desta forma, após pressionar a tecla **ENTER**, podemos pressionar a tecla de multiplicação, uma vez que o número estará em ambos os registradores, X e Y. Por exemplo:

73^2

Pressione	Visor
73 ENTER X	5.329,00

quadro 2.12

Para tirar a raiz quadrada

$\sqrt{30}$

Pressione	Visor
30 g $\sqrt{x}$	5,48

quadro 2.13

Para inverter um número

Digamos que você tenha dividido o número **54** por **32**, mas o que desejava era o contrário, dividir **32** por **54**. Para corrigir, basta pressionar a tecla **1/x**.

Para calcular raiz n-ésima

Para calcularmos raízes diferentes da quadrada, devemos usar as teclas **1/x** e **y^x**, lembrando a seguinte propriedade matemática:

$$\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$$

quadro 2.14

Assim, tirar a raiz cúbica de um número é o mesmo que elevá-lo à potência 1/3. Na HP-12C, o valor de $\sqrt[3]{5}$ é calculado assim:

Pressione	**Visor**
5 ENTER	5,00
3 1/x y^x	1,71

quadro 2.15

Para calcular o logaritmo natural
ln 5

Pressione	**Visor**
5 g LN	1,61

quadro 2.16

Para calcular o fatorial de um número
9!

Pressione	**Visor**
9 g n!	362.880,00

quadro 2.17

2.13 Exercícios

7) Calcule o resultado das expressões:

a) $E_1 = 9^5$ b) $E_2 = e^4$ c) $E_3 = \sqrt{15376}$

d) $E_4 = 1/14$ e) $E_5 = \sqrt[7]{144}$ f) $E_6 = \sqrt[5]{8{,}34}$

g) $E_7 = \ln 122$ h) $E_8 = 12!$

8) Calcule o valor da expressão $E = \dfrac{4{,}36 * 7{,}82 - 9{,}2}{3{,}91^2 - 8}$.

9) Calcule o valor da expressão $E = \dfrac{9{,}66 * 8{,}12 + 3{,}4^3}{95{,}81 - 3{,}89 * 4{,}57}$.

10) Calcule o valor da expressão $E = \dfrac{3 * 4{,}99 - \sqrt{17{,}51}}{5{,}11^4}$.

11) Calcule o valor da expressão $E = \dfrac{5{,}77 - 3 * 1{,}12}{5! - \sqrt[6]{6}}$.

12) Calcule o valor da expressão $E = LN\left(\dfrac{3}{7}\right) + LN\left(\sqrt[3]{9}\right)$.

13) Calcule o valor da expressão $E = LN\left(\dfrac{6{,}34 * 2{,}39 + 5{,}61^3}{\sqrt[3]{6{,}32} - 1{,}02 * 0{,}66}\right)$

14) Calcule o valor da expressão $E = \dfrac{e^6 * 4{,}45}{LN\ 9{,}93}$

15) Calcule o valor da expressão $E = e^{\frac{4{,}51*7{,}93}{\sqrt{50}}}$.

2.14 Porcentagem

Para calcular a porcentagem

Uma prestação no valor de R$ 94,00 foi paga com um desconto de 2%. Qual o valor do desconto? Qual o valor pago?

Pressione	Visor
94 ENTER	94,00
2 %	1,88
-	92,12

quadro 2.18

Assim, o desconto foi de R$ 1,88, enquanto que o valor pago foi de R$ 92,12. Uma característica do cálculo de porcentagem é que a HP-12C coloca o valor total (os 100%) no registrador **Y** após o cálculo da porcentagem. Isso facilita os cálculos de desconto (através da tecla de subtração) e de acréscimo (através da tecla de adição).

Para determinar a variação percentual

As vendas de uma importadora, que eram de R$ 53.905,00 baixaram para R$ 23.451,00. Qual a variação percentual?

Pressione	Visor
53905 ENTER	53.905,00
23451 Δ%	-56,50

quadro 2.19

Assim, as vendas caíram 56,50%. Note que, para inserirmos um número maior que 1.000, não podemos digitar o ponto, pois a HP-12C entenderia que o número fosse decimal. Configurando a máquina para usar a vírgula em vez de ponto conforme ensinamos há pouco, a máquina usa os pontos para exibir tal separação, conforme podemos notar.

Para determinar a porcentagem sobre o total

Qual o percentual que 12 pessoas representam sobre 46?

Pressione	Visor
46 ENTER	46,00
12 %T	26,09

quadro 2.20

2.15 Exercícios

16) Uma prestação no valor de R$ 143,67 foi paga com atraso e sobre o valor nominal incidiu uma multa de 2%. Qual foi o valor da multa?

17) Um salário, que era de R$ 400,00, foi reajustado no primeiro mês de 5% e no segundo mês de 7%. Calcule o salário após o segundo reajuste.

18) Um funcionário, que ganhava R$ 340,00, passou a receber R$ 440,00 mensais. Qual foi o percentual de aumento recebido?

19) A população de uma cidade era em 1990 de 45.500 e foi calculada em 61.300. Qual foi o percentual de aumento populacional?

20) Um automóvel, que custava R$ 18.000,00 quando novo depreciou para R$ 13.500,00 em dois anos. Qual foi o percentual de depreciação?

21) Um médico tratou com sucesso 53 de seus 60 pacientes. Qual o percentual de insucessos?

22) Um atacante fez 9 gols dos 14 gols a favor para seu time. Qual o percentual de gols que o atacante fez?

23) Após dois aumentos sucessivos mensais de 15%, qual foi o aumento resultante nos dois meses?

24) Em certo dia de aula, faltaram 4 pessoas de uma turma de 30 alunos. Qual o percentual de presença?

2.16 Respostas

3) 29 maio 2000, segunda

4) 20 janeiro 2000, quinta

5) 83 dias

6)

ano	natal	7 de setembro	aniversário
2.001	terça	sexta	pessoal
2.002	quarta	sábado	pessoal + 1
2.003	quinta	domingo	pessoal + 2
2.004	sábado	terça	pessoal + 4

7)
a- 59.049,00 b- 54,60 c- 124,00 d- 0,07
e- 2,03 f- 1,53 g- 4,80 h- 479.001.600,00

8) 3,42 9) 1,51 10) 0,02 11) 0,02

12) –0,11 13) 5,09 14) 782,06 15) 157,25

16) R$ 2,87	17) R$ 449,40	18) 29,41%	19) 34,73%
20) 25%	21) 11,67%	22) 64,29%	23) 32,25%
24) 86,67%			

3. Juros Simples

3.1 Introdução

Como vimos no capítulo 1, juros simples apresentam uma grande vantagem operacional sobre os compostos. Isso porque, para calculá-los, precisamos fazer apenas duas multiplicações, enquanto que os juros compostos são calculados com potenciação. Apesar de existirem fórmulas para o cálculo dos juros simples, muitos preferem utilizar o conceito de porcentagem e o de lógica. Por exemplo, uma aplicação de R$ 2.000,00, que rende 3% a.m., após 4 meses renderá 4 x 3% = 12%. Calculando 12% de R$ 2.000,00, teremos R$ 240,00. Inversamente, se tivermos agora o principal, os juros e a taxa, em nossas contas aparecerá também uma divisão se quisermos descobrir o prazo necessário para a aplicação. Isso poderia ficar uma pouco mais complicado se estivéssemos trabalhando com unidades diferentes para prazos e taxas. Por este motivo, muitos preferem trabalhar com fórmulas matemáticas. Além disso, as planilhas eletrônicas exigem um bom relacionamento com as fórmulas. Neste capítulo, encorajaremos o aluno a criar suas próprias fórmulas, específicas para cada situação, mas isso não o obrigará a resolver a maior parte dos exercícios através delas.

Vamos apresentar situações em que os juros simples são utilizados, como no cálculo de juros devido a excessos em conta corrente, descontos de duplicatas, operações com notas promissórias e negociações de títulos estaduais e federais. Além disso, vamos ensinar ao aluno utilizar o primeiro recurso financeiro de sua calculadora HP-12C: o cálculo dos juros simples.

3.2 Fórmula dos Juros Simples

Vamos detalhar o cálculo dos juros simples do exemplo da seção anterior. Tínhamos R$ 2.000,00 aplicados à taxa de 3% a.m. durante 4 meses. A primeira coisa feita foi multiplicar o prazo pela taxa, para saber o percentual total de juros:

$$\boxed{12\% = 4.3\% = 3\%.4 = \frac{3}{100}.4}$$

quadro 3.1

Depois disso, calculamos 12% do principal de R$ 2.000,00, isto é:

$$12\% \text{ de } 2\,000 = \frac{3}{100}.4.2000 = 2000.\frac{3}{100}.4$$

quadro 3.2

Observe bem agora o que está após o último sinal da igualdade. Isso representa os juros simples da aplicação de R$ 2.000,00 à taxa de 3% a.m. durante 4 meses. Substituindo os valores pelos símbolos que os mesmos representam, chegamos à fórmula:

$$J = PV.\frac{i}{100}.n$$

quadro 3.3

onde
J = juros simples
PV = principal
i = taxa de juros
n = prazo

Voltamos a frisar que a utilização da fórmula anterior é opcional e bastante dispensável. No entanto, sua importância será notada em situações que estudaremos a posteriori.

3.3 Saldo Adicional em Conta Corrente

Hoje em dia, os bancos têm aumentado suas arrecadações a partir da concessão de crédito a seus clientes. Este crédito se dá tanto na forma de financiamentos para se pagar mensalmente como na forma de permitir o uso de um *saldo adicional*. O primeiro caso será estudado no capítulo 6, enquanto que o segundo veremos a seguir.

O saldo adicional, mais conhecido como *limite de cheque especial*, é uma forma de empréstimo onde o cliente paga periodicamente os juros devido ao uso do mesmo e de acordo com o prazo utilizado.

Exemplo 3.1

Um cliente usou R$ 200,00 de seu limite durante 10 dias, isto é, usou R$ 200,00 do seu cheque especial e após 10 dias fez um depósito que o cobriu. Se o banco cobra juros de 12% a.m., teremos que o cliente deverá pagar:

$$\frac{12\%}{30} = 0{,}4\% \text{ a.d.}$$
$$10.0{,}4\% = 4\%$$
$$4\% \text{ de R\$ } 200{,}00 = \text{R\$ } 8{,}00$$

quadro 3.4

Inicialmente, passamos a taxa mensal para diária, dividindo-a por 30, obtendo 0,4% a.d.. Após 10 dias, teremos 4% de juros, que, calculados sobre R$ 200,00 totalizam R$ 8,00. Logo, os juros pagos pelo uso do limite será de R$ 8,00. Alternativamente, poderíamos utilizar a fórmula do quadro 3.3, deduzida na seção anterior:

$$J = PV.\frac{i}{100}.n$$
$$J = 200{,}00.\frac{0{,}4}{100}.10 = 8{,}00$$

quadro 3.5

3.4 Exercícios

1) Calcule os juros que devem ser pagos por utilizar o crédito de R$ 300,00 de uma conta corrente durante 10 dias, sabendo que o banco cobra uma taxa de 0,3% a.d..

2) Um banco cobra uma taxa de juros de 10% a.m. para os excessos em conta corrente e um cliente utilizou R$ 1.540,00 durante 16 dias. Qual deverá ser o valor dos juros a serem pagos?

3) Um banco cobra uma taxa de juros de 12% a.m. para os excessos em conta corrente de clientes com cheque especial. Um cliente tinha, no dia 01/set, um saldo positivo de R$ 1.000,00 (excluindo o limite). Calcule quanto o mesmo pagará de juros pelo uso do crédito de cheque especial, considerando os seguintes lançamentos em sua conta corrente:

data	lançamento	saldo
03 - set	+ 400,00	+ 1.400,00
06 - set	- 900,00	+ 500,00
07 - set	- 600,00	
15 - set	- 700,00	
28 - set	+ 1.900,00	

tabela 3.1

4) Um banco cobra uma taxa de juros de 10% a.m. para os excessos em conta corrente de clientes com cheque especial. Um cliente tinha, no dia 01/jan, um saldo positivo de R$ 300,00 (excluindo o limite). Calcule quanto o mesmo pagará de juros pelo uso do crédito de cheque especial, considerando os seguintes lançamentos em sua conta corrente:

data	lançamento	saldo
03 - jan	- 400,00	- 100,00
06 - jan	- 900,00	
07 - jan	+ 600,00	
15 - jan	+ 700,00	
28 - jan	+ 1.900,00	

tabela 3.2

3.5 Operações com Duplicatas

Com bastante freqüência, comerciantes adquirem mercadorias dos distribuidores e se propõem a pagamento posterior, para que possam revendê-las primeiro. Em muitos destes casos, é assinado um documento denominado *duplicata* onde os mesmos se comprometem a pagá-lo dentro de um prazo combinado. Este título poderá ser negociado, no entanto, antes deste vencimento, geralmente entre o distribuidor e uma instituição financeira, que se torna o novo credor do comerciante. O interesse que o distribuidor tem em negociá-la antes do prazo é o de obter capital de giro, enquanto que a instituição financeira visa lucro. Assim, a duplicata é negociada por um valor inferior ao *seu valor de face*, que é o valor acertado que o comerciante terá que pagar no futuro.

Dizemos que a duplicata é um *título* emitido pelo comerciante e que pode ser livremente negociada no mercado. Para que possa ser legitimada, deverá estar atrelada à nota fiscal da venda das mercadorias. A instituição pode ser um banco comercial ou uma instituição de créditos qualquer. Nosso interesse em apresentá-la neste capítulo está nesta negociação antecipada, isto é, a instituição financeira comprará do distribuidor a duplicata antes de seu vencimento, visando lucro. Para calcular o valor pago pela duplicata, a instituição financeira aplica um desconto sobre o seu valor de face, que é o valor da compra do comerciante. Assim, a instituição financeira compra esta duplicata por um valor inferior ao que a mesma valerá quando vencer.

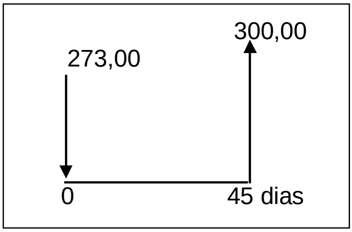
Exemplo 3.2

Um comerciante adquiriu 50 engradados de cerveja de um distribuidor e assinou uma duplicata no valor de R$ 300,00 com vencimento para pagamento no prazo de 45 dias. De posse de tal documento e necessitando de dinheiro, o distribuidor vai até a um banco autorizado e faz o desconto de tal duplicata, vendendo a mesma para esta instituição, naquele mesmo dia. O banco cobra uma taxa de desconto de 6% a.m.. Assim, o valor a ser negociado pela duplicata será:

$$\frac{6\%}{30} = 0{,}2\%\text{a.d.}$$
$$45.0{,}2\% = 9\%$$
$$9\% \text{ de R\$ } 300{,}00 = \text{R\$ } 27{,}00$$
$$\text{valor negociado} = 300 - 27 = 273{,}00$$

quadro 3.6

Inicialmente, convertemos a taxa de desconto mensal para diária. Em seguida, multiplicamos esta taxa diária por 45 dias e obtemos um desconto de 9%. Esta taxa de desconto deverá incidir sobre o valor de face (portanto, sobre o valor futuro), ao contrário da taxa comum (isto é, a de investimento) que incide sobre o valor presente. Assim, teremos um desconto de R$ 27,00. O diagrama de fluxos de caixa para o banco será o seguinte:



quadro 3.7

Podemos calcular a taxa de juros ganha pelo banco (taxa de investimento), lembrando que a mesma incide sobre o valor presente:

$$\frac{27}{273} = 0{,}099$$
$$\frac{0{,}099}{45} = 0{,}002 \cdot 100 = 0{,}22\%$$
$$0{,}22 \cdot 30 = 6{,}59\%\text{a.m.}$$

quadro 3.8

Dividimos os juros a serem ganhos pelo valor negociado. Em seguida, dividimos isso por 45 e obtemos um percentual de 0,22% a.d. Multiplicando por 30, teremos a taxa mensal simples de 6,59%. Portanto, a taxa de investimento do banco é maior do que a taxa de descontos, por se referirem os juros ganhos (R$ 27,00) ao valor negociado (R$ 273,00) e não ao valor de resgate (R$ 300,00).

Não esqueça : enquanto a taxa de desconto se baseia no valor do título (valor futuro), a taxa de investimento se baseia no valor negociado (valor presente). Em caso de dúvidas, consulte a seção 1.3.

3.6 Exercícios

5) Uma duplicata no valor de R$ 500,00 é descontada num banco que cobra uma taxa de desconto de 8% a.m., 22 dias antes de seu vencimento. Determine:

a) o valor negociado;

b) um esboço do diagrama de fluxos de caixa para o banco;

c) a taxa mensal de investimento bancário.

6) Um cliente apresentou para desconto no dia 26 de fevereiro de 1999 o seguinte *borderô* (conjunto de duplicatas):

duplicata	valor nominal	vencimento
01	587,00	27 mar 99
02	349,00	05 abr 99
03	614,00	09 abr 99
04	334,00	12 abr 99

tabela 3.3

Se o banco cobra uma taxa de desconto igual a 6,00% a.m., tarifa por título R$ 5,20, tarifa por borderô R$ 12,90, calcule:
a) o prazo de vencimento para cada uma das duplicatas;
b) o valor do desconto de cada uma das duplicatas;
c) o valor descontado (negociado) de cada uma das duplicatas;
d) o valor pago pelo banco, deduzindo os descontos de tarifas;
e) o prazo médio de resgate;
f) o diagrama de fluxos de caixa do banco;
g) a taxa de investimento para o banco.

7) Um cliente apresentou para desconto no dia 29 de março de 99 o seguinte *borderô*:

duplicata	valor nominal	vencimento
01	600,00	27 abr 99
02	250,00	05 mai 99
03	700,00	12 mai 99

tabela 3.4

Se o banco cobra uma taxa de desconto igual a 6,00% a.m., tarifa por título R$ 7,00, tarifa por borderô R$ 15,00, calcule:
a) o prazo de vencimento para cada uma das duplicatas;
b) o valor do desconto de cada uma das duplicatas;
c) o valor descontado (negociado) de cada uma das duplicatas;
d) o valor pago pelo banco incluindo descontos de tarifas;
e) o prazo médio de resgate;
f) o diagrama de fluxos de caixa do banco;
g) a taxa mensal de investimento para o banco.

3.7 Mais sobre Descontos

Na seção anterior, aprendemos a calcular descontos simples e a diferenciar taxa de investimento de taxa de desconto, operando com duplicatas. No entanto, há outros contextos bastante comuns em que são concedidos descontos, como na antecipação de compromissos pessoais.

Exemplo 3.3

Um carnê contendo três prestações a vencer em 10, 40 e 70 dias é quitado antecipadamente e é concedido um desconto de 1% a.m. sobre o valor nominal das prestações, que é de R$ 150,00. Qual foi o valor negociado?

Solução:

Devemos calcular os descontos para cada uma das parcelas:

parcela 1: $J = 150.\dfrac{1}{30.100}.10 = 0{,}50$

parcela 2: $J = 150.\dfrac{1}{30.100}.40 = 2{,}00$

parcela 3: $J = 150.\dfrac{1}{30.100}.70 = 3{,}50$

quadro 3.9

Logo, o total de descontos foi de R$ 6,00 e o valor negociado será:

150,00 x 3 = 450,00
450,00 – 6,00 = 444,00

quadro 3.10

No exemplo anterior, o carnê pode ser considerado um conjunto de títulos, pois as prestações são obrigações financeiras com prazos definidos. Outro compromisso financeiro também considerado um título é a *nota promissória*. Esta é assinada por uma pessoa física ou jurídica que se responsabiliza de quitar seu débito (valor nominal) no prazo especificado. Havendo a quitação antes do prazo, o credor poderá oferecer ou não desconto.

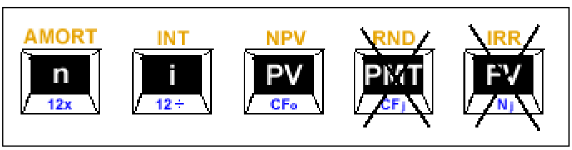
3.8 Exercícios

8) Uma compra é realizada sob pagamento com um cheque de valor nominal de R$ 600,00 pré-datado para 90 dias. No entanto, seu emitente obteve dinheiro após 20 dias da compra e deseja resgatar o cheque. Se seu credor lhe dará um desconto de 7,20% a.a., calcule:
a) o valor do desconto;
b) o valor descontado;
c) o diagrama de fluxos de caixa para o cliente.

9) Uma dívida documentada por uma nota promissória no valor de R$ 2.000,00 é negociada 53 dias antes de seu vencimento. Se a taxa de desconto for de 0,63% a.m., calcule:
a) o valor do desconto;
b) o valor negociado;
c) o diagrama de fluxos de caixa para o mutuário (devedor).

3.9 Juros simples na HP-12C

Sabemos que a HP-12C trabalha com registradores **X** (o visor), **Y**, ***Z*** e **W**. Além destes, existem os *registradores financeiros*, que são representados pelas cinco teclas superiores que estão à esquerda da máquina:



quadro 3.11

Considerando apenas a função principal indicada pela tecla, temos:
n **:** prazo
i : taxa percentual de juros
PV : principal valor
PMT : pagamento periódico
FV : futuro valor

Atenção: Estes dois últimos registradores (**PMT** e **FV**) só deverão ser usados para juros compostos.

A HP-12C apresenta uma grande limitação para o cálculo dos juros simples - automaticamente, ela só calcula os juros. Além disso, a taxa de juros deve estar expressa em anos e o prazo em dias.

Exemplo 3.4
Quais os juros pagos pelo uso de R$ 500,00 de uma conta especial, se a taxa cobrada pelo banco é de 12% a.m. e o dinheiro foi usado por 11 dias?
Solução:
PV = 500
n = 11 dias
i = 12% a.m. = 12 x 12 = 144% a.a.

Pressione	**Visor**
f CLEAR FIN	(mantido)
500 PV	500,00
11 n	11,00
12 ENTER 12 x i	144,00
f INT	-22,00

quadro 3.12

Assim, os juros pagos serão R$22,00. O sinal de negativo aparece para indicar a saída de capital, assim como um valor positivo sinaliza a entrada de capital Isso porque a calculadora HP-12C utiliza o conceito de fluxos de caixa. Para maiores informações, consulte a seção 1.6.

Continuando o exemplo anterior, no registrador **Y** teremos o principal (negativado). Assim, pressionando simplesmente a tecla **+**, teremos o total a ser restituído:

Pressione	**Visor**
+	-522,00

quadro 3.13

Já no registrador **Z**, teremos o valor dos juros com base no ano de 365 dias:

Pressione	**Visor**
f INT	-22,00
R↓	-500,00
R↓	-21,70

quadro 3.14

A tecla **R↓** permuta a pilha de registradores. Assim, o que estava em **Y** vai para **X**, o que estava em **Z** vai para **Y**, o que estava em **W** vai para **Z** e o que estava em **X** vai para **W**. A função **f INT** devolve três respostas: em **X**, os juros simples com base no ano de 360 dias; em **Y**, o principal e em **Z**, os juros simples com base no ano de 365 dias.

A prática nos mostra que a utilização destes recursos nos poupa bastante tempo. Procure resolver os exercícios seguintes usando o que aprendeu nesta seção.

3.10 Exercícios

10) Um título de capitalização de valor nominal a R$ 500,00 foi transferido a outro portador com 37 dias antes do vencimento. Se a taxa de desconto foi 72% a.a., calcule:
a) o valor do desconto;
b) o valor negociado;
c) o diagrama de fluxos de caixa para o comprador;
d) a taxa mensal de investimento.

11) Um financiamento foi feito em 3 vezes mensais sem entrada (para 30, 60 e 90 dias) com cheques nominais de R$ 100,00. Após 25 dias, o emitente resolveu antecipar a quitação de sua dívida, obtendo de seu credor um desconto de 0,015% a.d.. Calcule:
a) o valor total do desconto;
b) o valor total pago.

12) Um financiamento foi feito em 5 vezes mensais com entrada (para ato, 30, 60, 90, 120 dias) com cheques nominais de R$ 120,00. Após 20 dias, o emitente resolveu antecipar a quitação de sua dívida, obtendo um desconto de 0,015% a.d. Calcule:
a) o valor total do desconto;
b) o valor total pago.

13) Repita o problema anterior, considerando a negociação feita 42 dias após a compra, tendo pago, então, as duas parcelas iniciais.

14) Um carnê contendo 4 prestações mensais de R$ 88,94 é antecipado com 0,9% a.m. de desconto diretamente na loja em que se efetuou o

crédito. Se a negociação é feita 13 dias antes de vencer a primeira prestação mensal, calcule:
a) o valor total do desconto;
b) o valor total negociado.

15) Um banco desconta títulos a 4,7% a.m., mais tarifas administrativas no valor de R$ 14,00, *IOF (Imposto sobre Operações Financeiras*) de 6% a.a. recolhido para o *Banco Central*. Para um título de R$ 900,00 negociado 100 dias antes do vencimento, calcule:
a) o valor do desconto bancário;
b) o total de descontos;
c) o valor recebido pelo portador;
d) o diagrama de fluxos de caixa para o banco;
e) a taxa de investimento do banco.

16) Qual o IOF pago numa operação de desconto de um título cujo valor nominal era de R$ 780,00 negociado 34 dias antes de seu vencimento, sabendo que a tarifa de IOF é de 6% a.a.?

17) Um banco desconta títulos a 75% a.a., mais tarifas administrativas no valor de R$ 12,00, *IOF (Imposto sobre Operações Financeiras*) de 6% a.a. recolhido para o *Banco Central*. Para um título de R$ 3.500,00 negociado 88 dias antes do vencimento, calcule:
a) o valor do desconto bancário;
b) o total de descontos;
c) o valor recebido pelo portador;
d) o diagrama de fluxos de caixa para o banco;
e) a taxa mensal de investimento do banco.

18) Um cliente apresentou para desconto no dia 26 de fevereiro de 1999 o seguinte borderô:

duplicata	**valor nominal**	**vencimento**
01	587,00	29 mar 99
02	349,56	15 abr 99
03	614,43	19 abr 99
04	334,22	22 abr 99

tabela 3.5

Se o banco cobra uma taxa de desconto igual a 4,37% a.m., tarifa por título R$ 5,20, tarifa por borderô R$ 12,90, IOF de 6 % a.a., calcule:
a) o valor total do desconto bancário;
b) o total de descontos;
c) o valor recebido pelo portador;
d) o prazo médio de resgate;
e) o diagrama de fluxos de caixa para o banco;
f) a taxa mensal de investimento do banco.

3.11 Operações com Títulos Públicos

A fim de financiar o *déficit público*, os Estados, bem como a União, emitem títulos que pagam ao portador juros anuais e que são resgatados em até 30 anos. A matemática destes títulos é bastante simples. Os juros anuais são calculados sobre o valor de face ou valor nominal dos mesmos. Assim, por exemplo, um título de US$ 100.000 com rentabilidade de 12% a.a. dá a seu portador uma renda anual de US$ 12.000 até a data de resgate. No entanto, estes títulos são transferíveis e seus valores no mercado oscilam muito conforme a credibilidade do Brasil onde são negociados, principalmente no exterior.

Fatores que afetam seu preço de negociação:
1) calotes de países emergentes que estão no mesmo nível que o Brasil (podemos citar a crise asiática e a da Rússia em 1998);
2) ameaça de moratória dos mesmos, isto é, de não pagamento dos juros devido à ausência de capital (veja o exemplo do governo de Minas Gerais no início de 1999);
3) mudança na política do Brasil;
4) e demais fatores que põem em risco o seu pagamento.

Estes e outros fatores fazem com que haja muita oscilação no preço de um título na hora de transferi-lo de portador. Assim, o título acima no valor de US$ 100.000 que paga juros anuais de 12% poderá ser negociado com ágio ou com deságio. Por exemplo, se é negociado com ágio de 5%, significa que é vendido a outro investidor por 5% a mais do valor nominal, isto é, US$ 105.000. Por outro lado, se é negociado com deságio de 9%, será vendido com 9% a menos, isto é, por US$ 91.000 e assim por diante.

Chamamos de *preço unitário*, ***PU***, ao valor negociado de um título para cada 100 unidades monetárias do mesmo. Por exemplo, se um título da dívida pública está sendo negociado com deságio de 15%, o mesmo terá um **PU** de US$ 85,00. Isto significa que, para cada US$ 100,00 de valor de face, estão pagando US$ 85,00. Estes conceitos de ágio, deságio e de preço unitário são bastante utilizados no mercado financeiro.

Exemplo 3.5

Um *C-bond*, um dos títulos brasileiros mais comercializados no exterior, paga juros de 22% a.a. e seu resgate se dará daqui a 10 anos. Seu portador pretende vendê-lo com deságio de 18%, obtendo por isso US$ 820.000. Calcule:

a) seu valor de face;

b) seu preço unitário;

c) seu rendimento anual.

Solução:

a) A partir de uma regra de três, podemos calcular o valor de face deste título. Se será negociado por US$ 820 mil e isso implica que está 18% mais barato que seu valor de face, então:

US$		**%**		
820 000	—	82		
x	—	100	⇒	x = 1.000.000

quadro 3.15

b) Seu preço unitário também pode sair de uma regra de três:

US$		**%**		
1.000.000	—	100		
820.000	—	PU	⇒	PU = US$ 82,00

quadro 3.16

c) Basta calcular 22% de seu valor de face para obter o rendimento anual:

22% de 1.000.000	=	US$ 220.000,00

quadro 3.17

3.12 Exercícios

19) Um título *Global 27*, considerado o papel mais nobre do país, paga juros anuais de 14% e foi negociado com PU de US$ 65,50. Calcule:
a) o deságio da transação;
b) os juros anuais sabendo que seu valor de face é de US$ 5.000.000.

20) Um eurobônus, título que financia a dívida do estado de Minas Gerais, foi cotado a 52% de seu valor de face. Calcule:
a) o seu deságio;
b) seu valor de face, sabendo que o mesmo paga juros de 25% a.a. e que em três anos seu portador obteve um total de US$ 1.500.000.

21) O México emitiu um título em 1996 com prazo de 30 anos e que paga juros anuais de 11,5%. No início do mês de janeiro, um desses títulos cujo valor de face era de US$ 500 mil foi negociado por U$ 546,25 mil. Calcule:
a) o ágio da transação;
b) seu preço unitário;
c) o rendimento anual em dólares.

22) Um título argentino, o *Rap 27*, com prazo de resgate de 30 anos e que dá uma rentabilidade de 9,75% a.a. ao seu portador, foi negociado com ágio de 3,4%, sendo vendido por US$ 930,6 mil. Calcule:
a) seu preço unitário;
b) seu valor de face;
c) a rentabilidade total em quatro anos.

23) Um título da dívida pública do Brasil pagou US$ 520 mil em 5 anos ao seu portador. Se foi negociado por US$ 568 mil, sofrendo deságio de 29%, calcule sua rentabilidade anual.

24) Um título da dívida pública rendeu em quatro anos de sua existência US$ 392 mil a seu portador. O mesmo resolveu vendê-lo por US$ 1.554 mil, o que representou uma negociação com ágio de 11%. Calcule a sua rentabilidade anual.

25) Qual o valor de face de um título que paga juros anuais de 26,5%, o que, em cinco anos, totalizam US$ 3.445 mil?

26) Se o mesmo título do exercício anterior for negociado por US$ 2.215,2 mil, qual será o deságio da operação?

3.13 Fórmulas Derivadas

A fórmula do quadro 3.3, que foi apresentada numa seção anterior, somente pode ser usada quando buscarmos os juros e a taxa for expressa na mesma unidade que o prazo. Noutros casos, devemos fazer uma conversão. Quando usamos planilhas eletrônicas, é de bastante interesse a dedução de fórmulas específicas, que podem ser obtidas a partir de uma fórmula básica. A fórmula básica, no nosso caso, é a própria do quadro 3.3. As duas situações principais quando isso ocorrerá são:

1. Quando buscamos o prazo, a taxa, o principal.

Nestes casos, podemos manipular a fórmula anterior algebricamente para encontrar a equação desejada. Por exemplo, vamos obter o valor de **n**:

$$J = PV \cdot \frac{i}{100} \cdot n \qquad \frac{100.J}{PV.i} = n$$

$$100.J = PV \cdot i \cdot n \qquad n = \frac{100.J}{PV.i}$$

quadro 3.18

Partindo da fórmula básica, procuramos isolar a variável **n.** Inicialmente, tomamos o **100** que estava dividindo todo o lado direito da igualdade e o passamos para o lado esquerdo, agora, multiplicando. Depois disso, as variáveis **PV** e **i** estavam multiplicando todo o lado direito da igualdade e passarão a dividir no lado esquerdo. Assim, isolamos o **n**. Podemos, sem qualquer prejuízo para a equação, invertê-la, o que nos dá a fórmula procurada. Como exercício, você deverá obter as demais fórmulas para o principal e a taxa.

2. Quando a taxa e o prazo não concordam

Neste caso, devemos modificar sempre o prazo na fórmula. Por exemplo, taxa mensal e prazo em anos. Como um ano é igual a **12** meses, multiplicamos o **n** por **12**:

$$J = PV.\frac{i}{100}.12.n$$

$$J = \frac{12.PV.i.n}{100}$$

quadro 3.19

Outro exemplo, taxa anual e prazo em dias. Como um dia é a **360ª** parte do ano, dividimos **n** por **360**:

$$J = PV.\frac{i}{100}.\frac{n}{360}$$
$$J = \frac{PV.i.n}{36000}$$

quadro 3.20

3.14 Exercícios

27) Monte uma fórmula que determina a taxa percentual mensal em função do principal, dos juros e do período em dias.

28) Monte uma fórmula que determina a taxa percentual mensal em função do principal, dos juros e do período em anos.

29) Monte uma fórmula que determina o principal a partir da taxa quinzenal, prazo mensal e juros.

30) Monte uma fórmula que determina o prazo semestral a partir da taxa bimestral, principal e dos juros.

31) Monte uma fórmula que determina a taxa trimestral a partir do principal, dos juros e do prazo em bimestres.

32) Calcule o prazo de antecipação de um título de R$ 800,00 que foi negociado com taxa de desconto de 7% a.m. a R$ 712,27.

33) Qual o prazo de vencimento de um título de R$ 500,00 que foi negociado com uma taxa de desconto de 10% a.m. e que foi negociado a R$360,00?

34) Qual o prazo de antecipação de um título que foi negociado com taxa de desconto de 11% a.m., sendo negociado 84,97% de seu valor nominal?

35) Qual o prazo de antecipação de um título que foi negociado com taxa de desconto de 9% a.m. e deságio de 11,10%?

36) Qual o prazo de antecipação de um título de R$ 1.000,00 que foi negociado por R$ 890,00 e que dará a seu comprador uma taxa de investimento de 5% a.m.?

37) Quantos dias faltavam para o vencimento de um título que foi comprado com preço unitário de R$ 84,20 e que foi negociado com taxa de desconto de 6% a.m.?

38) Um título foi negociado de modo a proporcionar a seu comprador juros de 125,45% a.a.. Sabendo que foi adquirido com deságio de 20,28%, calcule o prazo de antecipação.

39) Um título é negociado com deságio de 20%, 79 dias antes de seu vencimento. Calcule:
a) a taxa mensal de desconto;
b) a taxa mensal de investimento do comprador.

40) Um título é negociado a 68% de seu valor nominal, 138 dias antes de seu resgate. Calcule:
a) a taxa mensal de desconto;
b) a taxa anual de investimento do comprador.

41) Um título de R$ 900,00 foi negociado 100 dias antes de seu vencimento por R$ 750,00. Calcule a taxa mensal de investimento do comprador.

42) Qual a taxa mensal de desconto que foi usada na negociação de um título a 48 dias de seu resgate, sabendo que o preço unitário foi de R$ 81,30?

43) Qual o ganho mensal do comprador (taxa mensal de investimento) que adquiriu um título com deságio de 10% a 21 dias de seu vencimento?

44) Qual a taxa anual de desconto que foi usada no cálculo do valor negociado de um título a 70 dias de seu vencimento, se o deságio resultante foi de 19%?

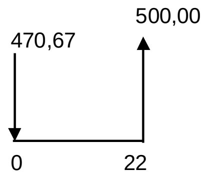
3.15 RESPOSTAS

1) R$ 9,00 2) R$ 82,13 3) R$ 44,80 4) R$ 15,00

5)

a- R$ 470,67

b-



c- 8,50% a.m.

6)

a- duplicata 01: 29 dias
duplicata 02: 38 dias
duplicata 03: 42 dias
duplicata 04: 45 dias

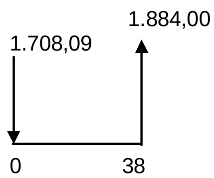
b- duplicata 01: R$ 34,05
duplicata 02: R$ 26,52
duplicata 03: R$ 51,58
duplicata 04: R$ 30,06

c- duplicata 01: R$ 552,95
duplicata 02: R$ 322,48
duplicata 03: R$ 562,42
duplicata 04: R$ 303,94

d- R$ 1.708,09

e- 38 dias

f-



g- 8,13% a.m.

7)

a- duplicata 01: 29 dias
duplicata 02: 37 dias
duplicata 03: 45 dias

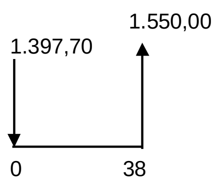
b- duplicata 01: R$ 34,80
duplicata 02: R$ 18,50
duplicata 03: R$ 63,00

c- duplicata 01: R$ 565,20
duplicata 02: R$ 231,50
duplicata 03: R$ 637,00

d- R$ 1.397,70

e- 38 dias

f-



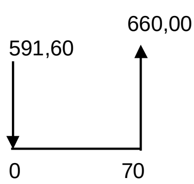
g- 8,60% a.m.

8)

a- R$ 8,40

b- R$ 591,60

c-

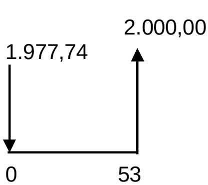


9)

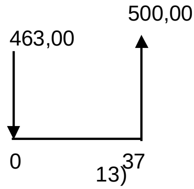
a- R$ 22,26

b- R$ 1.777,74

c-



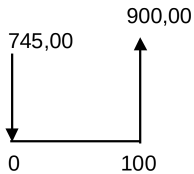
10)
a- R$ 37,00 b- R$ 463,00 c-



d- 6,48% a.m.

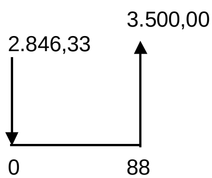
11)	12)	13)	14)
a- R$ 1,59	a- R$ 3,96	a- R$ 2,59	a- R$ 6,19
b- R$ 298,41	b- R$ 476,04	b- R$ 357,41	b- R$ 349,57

15)
a- R$ 141,00 b- R$ 170,00 c- R$ 730,0
d-



e- 6,24% a.m.

16) R$ 4,42
17)
a- R$ 641,67 b- R$ 705,00 c- R$ 2.795,00
d-

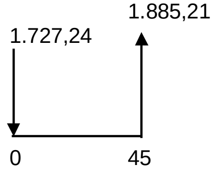


e- 7,83% a.m.

18)

duplicata	prazo	desconto	IOF
01	31 dias	26,51	3,03
02	48 dias	24,44	2,80
03	52 dias	46,54	5,33
04	55 dias	26,78	3,06

a- R$ 124,27 b- R$ 172,19
c- R$ 1.713,02 d- 45 dias e-



f- 6,10% a.m.

19)
a- 34,50%
b- US$ 700.000,00

20)
a- 48%
b- US$ 2 milhões

21)
a- 9,25%
b- US$ 109,25
c- US$ 57.500,00

22)
a- US$ 103,40
b- US$ 900.000,00
c- US$ 351.000,00

23) 13% a.a.

24) 7% a.a.

25) US$ 2,6 milhões

26) 14,80%

27) $i = \frac{3000 \cdot J}{PV \cdot n}$

28) $i = \frac{25 \cdot J}{3 \cdot PV \cdot n}$

29) $PV = \frac{50 \cdot J}{i \cdot n}$

30) $n = \frac{100 \cdot J}{3 \cdot PV \cdot i}$

31) $i = \frac{150 \cdot J}{PV \cdot n}$

32) 47 dias

33) 84 dias

34) 41 dias

35) 37 dias

36) 74 dias

37) 79 dias

38) 73 dias

39)
a- 7,59% a.m.
b- 9,49% a.m.

40)
a- 6,96% a.m.
b- 122,76% a.a.

41) 6,00% a.m.

42) 11,69%

43) 15,87% a.m.

44) 97,71% a.a.

4. Juros Compostos

4.1 Introdução

Vimos no capítulo 1 que a diferença entre os juros simples e os compostos está na forma de calculá-los. Juros simples não levam em conta a atualização do capital. Em outras palavras, juros simples são calculados com base sempre no principal da transação. Ao contrário, juros compostos atualizam periodicamente a base de cálculo dos juros.

Exemplo 4.1

Uma aplicação de R$ 1.000,00 é feita por três meses a juros de 10% a.m. No regime dos juros simples, calcularíamos 10% de R$ 1.000,00, por três meses:

mês	juros simples	montante
1	10% de 1.000 = 100	1.100,00
2	10% de 1.000 = 100	1.200,00
3	10% de 1.000 = 100	1.300,00

tabela 4.1

Já no regime de juros compostos, a taxa de 10% deverá incidir sobre o montante do mês anterior:

mês	juros compostos	montante
1	10% de 1.000 = 100	1.100,00
2	10% de 1.100 = 110	1.210,00
3	10% de 1.210 = 121	1.331,00

tabela 4.2

Disso, decorre que uma taxa simples de 10% a.m. eqüivalerá a uma taxa simples de 20% a.b., 30% a.t., etc, bastando uma simples multiplicação. Por outro lado, converter taxas compostas já não parece tão simples, pois, como vimos, uma taxa composta de 10% a.m. eqüivale a uma taxa composta de 21% a.b., 33,1% a.t., etc, não seguindo uma lógica linear. No próximo capítulo, nos ocuparemos destas conversões.

Neste capítulo, estudaremos os procedimentos matemáticos envolvidos nos cálculos do sistema composto de juros, a operacionalidade da calculadora HP-12C e procuraremos ilustrar tais tópicos com exemplos tirados do comércio, dos bancos e do mercado financeiro.

4.2 Fórmula do Montante Composto

Vamos deduzir a fórmula principal do regime composto baseando-nos no exemplo 4.1 dado anteriormente. Seja a aplicação de R$ 1.000,00 a juros compostos de 10% a.m. durante 3 meses. Observe que o montante de cada mês será o montante do mês anterior mais os juros. Lembrando que acrescer 10% equivale a multiplicar um valor pelo índice de 1,10, teremos:

mês	montantes compostos	
0	1.000,00 =	$1.000,00 \times (1,10)^0$
1	1,10 x 1.000,00 =	$1.000,00 \times (1,10)^1$
2	$1,10 \times [(1.000,00 \times (1,10)^1] =$	$1.000,00 \times (1,10)^2$
3	$1,10 \times [(1.000,00 \times (1,10)^2] =$	$1.000,00 \times (1,10)^3$

tabela 4.3

Observe que o expoente que aparece acima é igual ao mês em questão, o que faz com que possamos prever os montantes para qualquer mês, bastando, para isso, fazer a necessária alteração no expoente.

mês	montantes
3	$1.000,00 \times (1,10)^3$
6	$1.000,00 \times (1,10)^6$
10	$1.000,00 \times (1,10)^{10}$
18	$1.000,00 \times (1,10)^{18}$

tabela 4.4

Lembrando que:

1.000,00 = principal (**PV**) 1,10 = 1 + 10/100, onde 10 é a taxa de juros (**i**) expoente = prazo (**n**),

quadro 4.1

Vamos substituir os números anteriores pelas letras que designam o que os mesmos representam:

$$FV = PV.\left(1 + \frac{i}{100}\right)^n$$

quadro 4.2

onde:
FV = futuro valor (montante)
PV = presente valor (principal)
i = taxa percentual de juros
n = prazo

No caso do regime de juros simples, trabalhar com os próprios juros é mais cômodo, enquanto que no regime composto, trabalhar com o montante é mais imediato, considerando as fórmulas matemáticas dos mesmos.

A partir de agora, ficará implícito que o regime utilizado no cálculo dos juros em todos os exercícios será o composto, salvo quando vier explícito o contrário. Isso porque é o sistema mais justo, apesar de nem sempre ser o mais usado.

Exemplo 4.2
Calcule o montante da aplicação de R$ 600,00 a juros de 4,5% a.m. durante 7 meses.
Solução:
Temos as seguintes variáveis:
PV = 600,00
i = 4,5% a.m.
n = 7 meses
Note que o prazo coincide com a unidade da taxa de juros. Assim,

aplicando a fórmula:

Para realizar tais operações na HP-12C, fazemos:

$$FV = PV.\left(1+\frac{i}{100}\right)^{n}$$

$$FV = 600.\left(1+\frac{4,5}{100}\right)^{7}$$

$$FV = 816,52$$

quadro 4.3

Para realizar as operações do quadro 4.3 na calculador HP-12C, fazemos:

Pressione	**Visor**
4,5 ENTER 100 ÷	0,05
1+	1,05
7 y^x	1,36
600 x	816,52

tabela 4.5

Ainda neste capítulo, aprenderemos a calcular este montante a partir dos registradores financeiros da calculadora HP-12C.

4.3 Exercícios

1) Calcule o montante da aplicação de R$ 1.000,00 a juros de 2,8% a.m. durante 9 meses.

2) Qual o montante produzido pela aplicação de R$ 1.200,00 a juros de 4% a.b. durante 9 bimestres?

3) Qual o montante da aplicação de R$ 1.400,00 a juros de 3,5% a.m. durante 2 anos?

4.4 Incompatibilidade entre Prazo e Taxa de Juros

Nos cálculos dos juros compostos, vamos procurar sempre expressar o período conforme a unidade da taxa de juros e não o contrário. Isto é porque a taxa de juros incide sobre o valor atualizado, o que torna a conversão das taxas de juros compostas um cálculo exponencial, enquanto que a conversão de taxas simples era linear (bastando dividir ou multiplicá-las). Logo, vamos dividir ou multiplicar o período e não a taxa composta, pois este é convertido da mesma maneira em ambos regimes.

O procedimento de conversão é feito através de multiplicação ou de divisão, conforme passamos de um período unitariamente maior para menor e vice-versa, respectivamente. Por exemplo, 7% a.s. e 3 anos. Começamos, novamente, pelo período: Um ano são quantos semestres? A resposta, neste caso, é direta: um ano são 2 semestres. Logo, temos que multiplicar os anos (3) por 2, o que resulta em 6 semestres. Outro exemplo, 5 meses e taxa de 4% a.t.. Começamos a partir do período e perguntamo-nos: Um mês são quantos trimestres? Como a resposta é invertida, isto é, um trimestre são 3 meses, temos que dividir por 3: um mês é eqüivale a 1/3 = 0,3333 semestre.

4.5 Exercícios

4) Qual o montante da aplicação de R$ 500,00 à taxa de 40% a.a. durante 9 meses?

5) Qual o montante da aplicação de R$ 2.000,00 a uma taxa de 5,3% a.b. durante 1 ano?

6) Qual o rendimento da aplicação de R$ 3.000,00 a juros de 27% a.a. durante 8 trimestres?

4.6 Cálculo do Principal

Quando o valor desconhecido for o capital principal, podemos utilizar uma fórmula específica como veremos a seguir. Para isolar o **PV** na fórmula do quadro 4.2, transferimos o fator que estava multiplicando para o outro lado da igualdade, onde passará a dividir:

$$FV = PV.\left(1+\frac{i}{100}\right)^n \qquad PV = \frac{FV}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^n}$$

$$\frac{FV}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^n} = PV$$

quadro 4.4

Exemplo 4.3

Qual o principal capaz de gerar um montante de R$ 3.000,00 ao longo de 6 meses aplicado à taxa de 4% a.m.?

Solução 1:

Aplicação da fórmula específica do quadro 4.4:

$$PV = \frac{3000}{\left(1+\frac{4}{100}\right)^6}$$

$$PV = 2.370,94$$

quadro 4.5

Solução 2:

Aplicação da fórmula geral do quadro 4.2:

$$3000 = PV.\left(1+\frac{4}{100}\right)^6$$

$$\frac{3000}{\left(1+\frac{4}{100}\right)^6} = PV$$

$$PV = 2.370,94$$

quadro 4.6

4.7 Exercícios

7) Qual o principal capaz de gerar um montante de R$ 5.000,00 ao longo de 10 meses submetido ao rendimento de 4% a.m.?

8) Qual o capital que deverá ser investido a juros de 2,1% a.m. para que possa em 5 meses totalizar R$ 1.000,00?

9) Qual o capital a ser investido segundo uma taxa de juros de 3,0% a.m. para que possa totalizar R$ 2.400,00 em 11 meses?

4.8 Cálculo da Taxa

Isolar a taxa de juros da fórmula básica exige um pouco mais de cuidados. Partido da fórmula básica do quadro 4.2, passamos o **PV** para o lado esquerdo da igualdade. Como o mesmo estava multiplicando todo o lado direito, passará a dividir todo o esquerdo:

$$FV = PV.\left(1+\frac{i}{100}\right)^n$$

$$\frac{FV}{PV} = \left(1+\frac{i}{100}\right)^n$$

quadro 4.7

Agora, passaremos o expoente **n** para o lado esquerdo, lembrando que a operação inversa da potenciação é a radiciação. Como ele estava elevando todo o lado direito, passará a extrair a raiz de todo o lado esquerdo:

$$\sqrt[n]{\frac{FV}{PV}} = 1+\frac{i}{100}$$

quadro 4.8

Passaremos o **1** que está somando todo o lado direito para subtrair todo o lado esquerdo da igualdade:

$$\sqrt[n]{\frac{FV}{PV}} - 1 = \frac{i}{100}$$

quadro 4.9

Só falta agora passar o **100** que está dividindo todo o lado direito para multiplicar todo o lado esquerdo:

$$100.\left(\sqrt[n]{\frac{FV}{PV}}-1\right)=i$$

quadro 4.10

Invertendo a equação obtida:

$$i=100.\left(\sqrt[n]{\frac{FV}{PV}}-1\right)$$

quadro 4.11

Exemplo 4.4

Qual a taxa de juros mensal da aplicação de R$ 2.000,00 que resultou em juros de R$ 500,00 em 8 meses?

Solução:

PV = 2000

n = 8 meses

FV = 2000 + 500 = 2500

Aplicando a fórmula específica do quadro 4.11:

$$i=100.\left(\sqrt[8]{\frac{2500}{2000}}-1\right)$$

$$i=2{,}83\%\ \text{a.m.}$$

quadro 4.12

Para calcular as operações do quadro anterior na HP-12C, digitamos:

Pressione	Visor
2500 ENTER 2000 ÷	1,25
8 1/x y^x	1,03
1 -	0,03
100 x	2,83

tabela 4.6

4.9 Exercícios

10) Qual a taxa de juros mensal da aplicação de R$ 3.000,00 que resultou em juros de R$ 1.000,00 em 12 meses?

11) O capital de R$ 400,00 foi aplicado durante 5 meses e rendeu juros de R$ 90,00. Qual a taxa mensal desta aplicação?

12) O capital de R$ 800,00 foi submetido a uma aplicação e resultou em montante de R$ 944,00 após 7 meses. Qual a taxa mensal da aplicação?

4.10 Cálculo do Período

Para se isolar o **n** da fórmula básica, é necessário utilizar a função matemática do logaritmo. A fórmula do prazo, após alguns passos algébricos, é:

$$\boxed{n = \frac{LN\left(\frac{FV}{PV}\right)}{LN\left(1+\frac{i}{100}\right)}}$$

quadro 4.13

onde:
LN = logaritmo natural ou neperiano

Exemplo 4.5

Qual o prazo do investimento de R$ 400,00 que rendeu R$ 61,17, sabendo que a taxa foi de 2,4% a.m.?

Solução:

Usando a fórmula específica do quadro 4.13:

$$n = \frac{LN\left(\frac{FV}{PV}\right)}{LN\left(1+\frac{i}{100}\right)} \qquad n = \frac{LN\left(\frac{461{,}17}{400{,}00}\right)}{LN\left(1+\frac{2{,}4}{100}\right)} = 6 \text{ meses}$$

quadro 4.14

Para calcular as operações do quadro anterior na calculadora HP-12C, fazemos:

Pressione	Visor
461,17 ENTER 400 ÷	1,15
g LN	0,14
2,4 ENTER 100 ÷ 1+	1,02
g LN	0,02
÷	6,00

tabela 4.7

4.11 Exercícios

13) Qual o prazo de uma aplicação de R$ 3.000,00 que totalizou R$ 3.978,71 sob taxa de 2,60% a.m.?

14) Qual o prazo capaz de transformar o capital de R$ 300,00 em R$ 400,00 submetido à taxa de 1,5% a.m.?

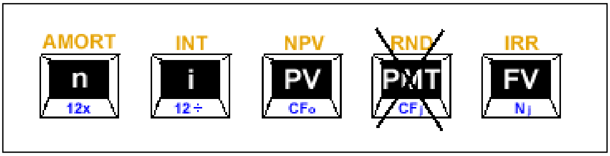
15) Qual o prazo de um investimento de R$ 1.000,00 que rendeu juros de R$ 250,00, sabendo que a taxa aplicada foi de 3,1% a.m.?

16) Qual o prazo da aplicação de R$ 500,00 que totalizará R$ 800,00 quando submetido à taxa de 45% a.a.?

17) Qual o prazo capaz de dobrar um capital quando submetido a juros de 50% a.a.?

4.12 Na Calculadora HP-12C

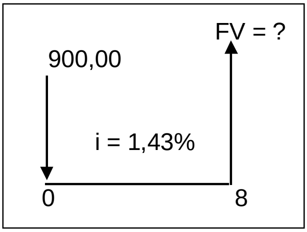
Os registradores financeiros a serem usados aqui são as teclas superiores esquerdas do teclado da máquina: **n** , **i**, **PV** e **FV**:



quadro 4.15

Temos que informar três destes valores e digitar a quarta tecla para obter a resposta. O período de **n** e da taxa **i** devem coincidir em unidade, ao contrário do que era feito para juros simples, onde o período era necessariamente em dias e a taxa anual. Para recuperar um valor dos registradores financeiros, pode-se usar a tecla **RCL**.

Exemplo 4.6
Qual o montante da aplicação de R$ 900,00 durante 8 meses sob taxa de 1,43% a.m.?
Solução:
Vamos lembrar a notação em diagrama de fluxos de caixa:



quadro 4.16

Os valores conhecidos são:

PV = - 900
i = 1,43
n = 8

quadro 4.17

Note que PV aparece negativo já que a HP-12C diferencia valores positivos e negativos: um valor é positivo quando representa uma entrada de capital; é negativo quando representa uma saída de capital.

Pressione	Visor
f CLEAR FIN	(mantido)
900 CHS PV	-900,00
1,43 i	1,43
8 n	8,00
FV	1.008,26

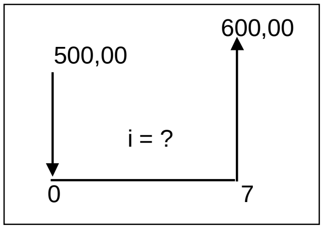
tabela 4.8

Exemplo 4.7

Qual a taxa de juros a que deverá ser submetido um capital de R$ 500,00 para que o mesmo renda R$ 100,00 de juros em 7 meses de aplicação?

Solução:

Fazendo a notação em diagrama de fluxos de caixa:



quadro 4.18

Note que PV deverá ser digitado negativo enquanto que FV é positivo:

Pressione	**Visor**
f CLEAR FIN	(mantido)
500 CHS PV	-500,00
600 FV	600,00
7 n	7,00
i	2,64

tabela 4.9

Logo, a taxa é de 2,64% a.m., pois sua unidade sempre concordará com a unidade do prazo (neste caso, meses).

Algo relevante para a calculadora HP-12C é que, normalmente, para períodos fracionários, a mesma calcula os juros como sendo simples. Assim, um investimento de R$ 100,00 durante 2,5 meses à taxa de 10% a.m. nos dará um montante de R$ 127,05, por que:

$$100{,}00 \xrightarrow{+10\%} 110{,}00 \xrightarrow{+10\%} 121{,}00$$

quadro 4.19

Usando o capital de R$ 121,00, a HP-12C aplica agora juros simples para o restante do prazo (fracionário) : 10% a.m. em juros simples eqüivalem a 5% em 0,5 mês ou 15 dias:

$$121{,}00 \xrightarrow{+5\%} 127{,}05$$

quadro 4.20

Podemos verificar que a máquina faz exatamente o que foi exposto, através de seus registradores financeiros:

Pressione	**Visor**
f CLEAR FIN	(mantido)
100 CHS PV	-100,00
10 i	10,00
2.5 n	2,50
FV	127,05

tabela 4.10

Este procedimento é usado nos EUA e é chamado convenção linear para períodos fracionários. No entanto, no Brasil, o mesmo não é usado e, mesmo para prazos fracionários, considera-se o regime composto. Para modificar a máquina neste sentido, você deverá pressionar as teclas **STO EEX**, ocasião em que aparecerá a letra **C** permanentemente no visor de sua máquina. Você notará que, mesmo desligando a máquina, o indicador **C** não será esquecido. Para retornar à condição americana, pressione novamente as teclas **STO EEX**. Nos exercícios, só iremos utilizar a convenção linear quando explícito no problema, já que estamos no Brasil. Continuando o exemplo do quadro anterior:

Pressione	**Visor**
STO EEX	(aparece o C)
FV	126,91

tabela 4.11

Este resultado pode ser confirmado pela fórmula 4.1 do montante composto.

Outra característica da HP-12C é que a mesma ao calcular prazos e, caso estes tenham partes decimais, o resultado será o inteiro seguinte. Assim, se um prazo resultou em **3,2** meses, a calculadora mostrará **4** meses. Esta consideração é útil quando não houver a possibilidade de o rendimento ser dado numa unidade menor, por exemplo, taxa em meses e prazo em dias. No entanto, quando isso não for o caso, vamos preferir a fórmula do quadro 4.13 apresentada anteriormente, que faz uso de logaritmos neperianos. Podemos, ainda, lançar mão do recurso de programação da calculadora HP-12C, mas isso, no entanto, foge à abrangência deste livro.

4.13 Exercícios

18) Qual é o montante da aplicação de R$ 450,00 a juros de 3,5% a.m. durante 8 meses?

19) Qual é o rendimento da aplicação de R$ 450,00 a juros de 3,5% a.m. durante 8 meses?

20) Qual o principal capaz de gerar um montante de R$ 3.400,00 em 6 meses sob taxa de 2,34% a.m.?

21) Certa quantia foi investida durante 7 meses sob a taxa de 2,99% a.m. e resultou em R$ 6.145,19. Descubra o valor de tal quantia.

22) Uma loja anuncia que seus produtos podem ser comprados à vista ou em 30 dias sem acréscimo. No entanto, um cliente conseguiu do gerente um desconto de 10% sobre o valor para pagamento à vista. Qual é a taxa de juros a ser paga caso comprasse em 30 dias?

23) Uma pessoa precisa de R$ 1.000,00 e estuda três alternativas de pagamento:
(A) Uma única parcela de R$ 1.100,00 daqui a 1 mês.
(B) Uma única parcela de R$ 1.600,00 daqui a 5 meses.
(C) Uma única parcela de R$ 1.900,00 daqui a 7 meses.
Qual delas tem a maior taxa de juros e em qual delas pagam-se juros maiores?

24) Um investidor comprou um título no mercado financeiro cujo prazo era de 3,5 meses e valor nominal R$ 500,00. Se o valor negociado foi de R$ 400,00, calcule:
a) a taxa mensal simples de seu investimento;
b) a taxa composta de seu investimento

25) Uma duplicata de valor nominal igual a R$ 1.000,00 é descontada com 1 mês antes do vencimento sob juros simples de 7% a.m. Se o banco onde se fez o desconto cobra R$ 6,00 por título e R$ 10,00 por borderô como tarifas administrativas, calcule as taxas mensais de investimento:
a) simples; b) composta.

26) Qual o capital a ser investido de modo que, aplicado a juros de 2% a.m., renda em 5 meses R$ 93,67?

27) Qual o capital que, investido a 3% a.m. em 11 meses, capitalizou juros de R$ 768,47?

28) Uma aplicação de R$ 2.400,00 é feita à taxa de 3,13% a.m. de juros, durante 6 meses. Após isso, serão descontados 20% dos rendimentos brutos para o *Imposto de Renda (IR)*. Determinar:
a) o rendimento bruto;
b) o valor descontado para o IR;
c) o ganho do investidor, expresso em taxa de juros mensal, descontado o imposto.

29) Calcule o montante resgatado por uma aplicação de R$ 3.400,00 à taxa de 3,05% a.m. de juros, durante 7 meses, sabendo que incidem 20% de imposto de renda sobre os rendimentos brutos e 0,38% de CPMF sobre o saque final do dinheiro. Qual o ganho do investidor, descontados IR e CPMF?

30) Repetir o problema 28 supondo que o imposto de renda fosse recolhido antecipadamente e que fosse pago à parte.

31) Repetir o problema 29 supondo que o imposto de renda fosse recolhido antecipadamente e que fosse pago à parte.

32) Um investidor sabe que, num tipo específico de aplicação, terá que pagar 15% sobre os rendimentos para o IR. Qual o prazo, então, que deverá aplicar seu dinheiro para que o mesmo gere um montante

líquido igual ao dobro do que aplicou, se a taxa de juros ao mês for de 4%?

33) Repetir o problema anterior, caso o IR fosse de 10% sobre os rendimentos líquidos.

34) Repetir o problema 32, caso o IR fosse de 20% sobre os rendimentos líquidos.

4.14 Respostas

1) R$ 1.282,15	2) R$ 1.707,97	3) R$ 3.196,66
4) R$ 643,53	5) R$ 2.726,47	6) R$ 1.838,70
7) R$ 3.377,82	8) R$ 901,30	9) R$ 1.733,81
10) 2,43% a.m.	11) 4,14% a.m.	12) 2,39% a.m.
13) 11 meses	14) 19 meses e 10 dias	15) 7 meses e 10 dias
16) 1 ano, 3 meses e 6 dias		17) 1 ano, 8 meses e 16 dias
18) R$ 592,56	19) R$ 142,56	20) R$ 2.959,42
21) R$ 5.000,00	22) 11,11% a.m.	23) a- i = 10,00% a.m. e J = R$ 100,00 b- i = 9,86% a.m. e J = R$ 600,00 c- i = 9,60% a.m. e J = R$ 900,00 Maior taxa, alternativa a. Maiores juros, alternativa c.
24) a- 7,14% a.m. b- 6,58% a.m.	25) a- 9,41% a.m. b- 9,41% a.m.	26) R$ 899,97
27) R$ 2.000,18	28) a- R$ 487,50 b- R$ 97,50 c- 2,54% a.m.	29) montante = R$ 4.021,30 ganho do investidor = 2,43% a.m.
30) a- R$ 487,50 b- R$ 97,50 c- 2,45% a.m.	31) montante = R$ 4.179,86 ganho do investidor = 2,32% a.m.	
32) 19 m. e 25 dias	33) 19 m. e 2 dias	34) 20 m. e 21 dias

5. Taxas de Juros

5.1 Introdução

Ao escrever este capítulo, tivemos em mente que se faz necessário conceituar as inúmeras taxas de juros que compõem o vocabulário financeiro, para eliminar as confusões que são feitas. Além disso, vamos apresentar a matemática envolvida em cada uma delas, bem como em suas conversões.

Estudamos as taxas de juros simples e concluímos que as mesmas obedecem a uma lógica linear de conversão. Isso se deve a seu princípio de cálculo, sempre feito baseando-se no principal da transação. Assim, 2% a.m. eqüivalem a 4% a.b., 6% a.t., etc. Quando estudamos as taxas de juros compostos, vimos que as conversões anteriores deixam de ser válidas. Assim, 2% a.m. não eqüivalem a 4% a.b.. Evitamos abordar a conversão de taxas compostas através da conversão dos prazos, que estabelece uma lógica linear, independente do regime simples ou composto. Assim, quando a unidade do prazo não concordava com a unidade da taxa, dividíamos ou multiplicávamos o prazo para que este ficasse na mesma unidade da taxa. No entanto, existem situações em que a taxa composta deve ser convertida, isto é, mudada de unidade. Por exemplo, as propagandas de financiamentos feitas pelas lojas no Brasil, atualmente, são obrigadas a divulgarem as taxas cobradas, tanto em unidade mensal como em anual.

Vamos estudar terminologias que confundem até hoje o cálculo dos juros, como as já consagradas taxas nominais. A tabela de cálculo de financiamentos, muito usada até hoje (*Tabela Price*), se baseia nesta taxa. Vamos estabelecer a diferença entre taxas nominais e efetivas.

Estudaremos ainda os corrosivos efeitos que a inflação exerce sobre os juros, estabelecendo formas de se calcular os juros reais e os aparentes, além de um estudo das negociações com correções de moeda.

5.2 Taxas Nominais x Taxas Efetivas

A confusão que sempre girou em torno dos juros simples e compostos deixou sua marca registrada no mercado brasileiro: as famosas taxas nominais. Estas rezam em inúmeros contratos, mas servem apenas como bases de cálculo para as denominadas taxas efetivas.

Exemplo 5.1
Um empréstimo de R$ 100,00 é feito durante 1 ano segundo a taxa nominal de 48% a.a. capitalizados mensalmente. Isso significa que a taxa de juros mensal efetiva da transação é de 48 / 12 = 4% a.m.. É claro que 4% a.m. ao longo de juros compostos em 1 ano totalizarão mais de 48%, conforme podemos calcular em nossa HP-12C:

Pressione	**Visor**
f CLEAR FIN	(mantido)
100 PV	100,00
4 i	4,00
12 n	12,00
FV	-160,10

quadro 5.1

Assim, o tomador do empréstimo após **1** ano deverá restituir **R$ 160,10**, que inclui o principal de **R$ 100,00** mais os juros de **R$ 60,10**. Por isso, dizemos que **48% a.a. capitalizados mensalmente** resultou em **60,10% a.a. efetivos**. Percebemos, com isso, que a manutenção das taxas nominais pode servir para encobrir a taxa verdadeira (isto é, a efetiva) e seu uso está assim justificado. O que mais caracteriza uma taxa nominal é que ela nunca corresponde numericamente ao que representará na prática. É dita que é anual, mas capitalizada numa unidade como mensal, por exemplo, como vimos agora. Mas, também poderia ser semestral capitalizada em bimestres, etc.

Em nosso livro, sempre que uma taxa de juros for nominal, será sinalizada neste sentido, mas, na prática do mercado, isso poderá estar subentendido. Isso ocorre nos financiamentos que obedecem à Tabela Price, que é uma tabela onde a taxa é anual, mas capitalizada mensalmente. Assim, **48% a.a. price** eqüivalerão a **60,10% a.a. efetivos**.

Notamos ainda que quando a taxa for nominal, o prazo de capitalização do dinheiro será diferente do prazo de unidade da taxa, mas a conversão entre estas taxas se dará conforme as regras dos juros simples, apesar da taxa a ser obtida ser composta. Assim, chamamos esta de taxa efetiva (no exemplo, **4% a.m.**), enquanto que a taxa que serviu apenas para seu cálculo chamamos de nominal (no exemplo, **48% a.a.**).

5.3 Exercícios

1) Um financiamento é feito segundo uma taxa de 70% a.a. capitalizados mensalmente. Descubra o valor da taxa mensal efetiva a ser paga.

2) Um financiamento é feito segundo uma *taxa price* de 36% a.a. (taxa price é o mesmo que % a.a. capitalizada mensalmente). Qual a taxa mensal efetiva do financiamento?

3) A quantia de R$ 400,00 é emprestada por 2 anos e o tomador se comprometeu a pagar juros de 18% a.t. capitalizados mensalmente. Determine:
a) a taxa efetiva mensal;
b) o valor a ser pago daqui a 2 anos.

4) Um empréstimo de R$ 3.000,00 é contraído hoje para se pagar o principal e os juros daqui a 2 anos segundo uma taxa (nominal) de 60% a.a. capitalizados mensalmente. Determine:
a) a taxa mensal efetiva;
b) o valor a ser pago daqui a 2 anos;

5) Um investimento poderá ser feito em três instituições financeiras, sendo que cada uma delas possui diferente forma de remuneração:
(i) Banco A: taxa nominal de 48% a.a. capitalizados mensalmente;
(ii) Banco B : taxa efetiva de 3,5% a.m.
(iii) Banco C: taxa nominal de 48% a.a. capitalizados bimestralmente.
Para o investidor, aponte a melhor opção e estabeleça uma comparação entre as taxas de juros.

6) Qual a taxa anual capitalizada mensalmente de um investimento de R$ 3.200,00 que rendeu R$ 430,00 em 5 meses?

7) Qual a taxa semestral capitalizada bimestralmente da aplicação de R$ 4.000,00 que em 10 meses rendeu R$ 940,00 de juros?

8) Qual a taxa anual capitalizada mensalmente a que se submeteu um capital de R$ 3.000,00 em 100 dias transformando-o em R$ 3.240,00?

9) Qual a taxa mensal capitalizada ao dia de cobrança de juros de uma prestação, sabendo que o valor nominal era de R$ 1.200,00 e que se pagaram juros compostos de R$ 87,00 pelo atraso de 14 dias?

10) Uma aplicação de 20 meses teve o retorno de 37,65% de juros. Calcule a taxa mensal de aplicação e a taxa anual capitalizada ao mês.

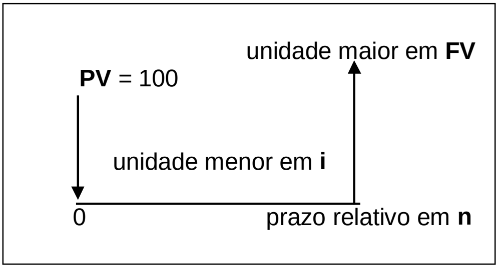
11) Qual a taxa anual capitalizada em meses de juros de uma aplicação que, em 4 meses, rendeu 13% do valor aplicado de juros?

5.4 Conversão de Taxas Compostas

Quando tínhamos o regime simples de juros, bastava multiplicar ou dividir o valor da taxa para transformá-la em taxa com outro período. A razão desta prática simples decorre do fato de os juros simples serem calculados sempre sobre o principal da transação. Assim, 5% a.m. eram iguais a 5 x 12 = 60% a.a.

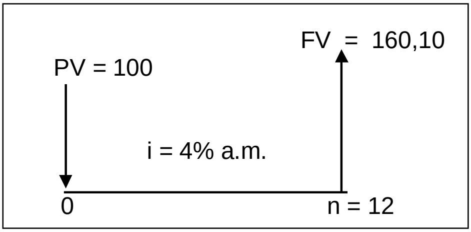
Com juros compostos, temos procurado contornar este problema, convertendo o prazo e não a taxa, pois o prazo em qualquer sistema transforma-se conforme multiplicação ou divisão. Assim, se a taxa anual é de **15%** e o prazo é de **7** meses, fazemos **7 ÷ 12 = 0,58** ano. Salvo quando a taxa está capitalizada num período diferente (taxa nominal), não podemos multiplicá-la ou dividi-la a fim de convertermos para um outro período.

O modo mais fácil de converter unidades de taxas foi introduzido na seção 5.2, quando mostramos que **4% a.m.** eqüivalem a **60,10% a.a.**. Isso foi feito segundo uma aplicação fictícia de **R$ 100,00** submetidos à taxa de **4% a.m.** durante **12** meses (**1** ano) e observado o montante obtido: **R$ 160,10**. Assim, os juros foram de **R$ 60,10** sobre um principal de **R$ 100,00**, o que equivale a **60,10%**. Como isso ocorreu em um ano, a taxa de juros é de **60,10% a.a.**. Note que a escolha de outro principal diferente de **R$ 100,00** dificultaria encontrar a taxa anual composta. Podemos representar o que foi feito conforme o seguinte esquema:



quadro 5.1

Inicialmente, o valor **100** é armazenado no registrador **PV**. No exemplo, tivemos que a unidade menor era a mensal, **4% a.m.**, assim, este valor (**4**) é armazenado no registrador **i**. O prazo relativo é sempre maior do que **1** e é a expressão de quantas unidades menores cabem na maior; no exemplo de quantos meses cabem em **1** ano: **12**. Assim, calculamos **FV** (**160,10**) e deduzimos o **100** que era o principal, obtendo com isso a taxa de **60,10% a.a.**:

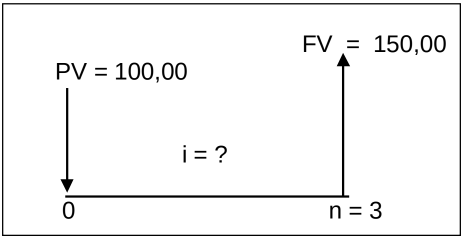


quadro 5.2

A digitação deste exemplo está detalhada na seção 5.2.

Exemplo 5.2

O exemplo anterior tratava da conversão de uma unidade menor de taxa para a maior. Vamos agora converter uma unidade de taxa maior para uma menor. Converteremos 50% a.s. em taxa bimestral. Assim, podemos montar o seguinte diagrama de fluxos de caixa:



quadro 5.3

Operando em nossa HP-12C, teremos:

Pressione	Visor
f CLEAR FIN	(mantido)
100 CHS PV	-100,00
3 n	3,00
150 FV	150,00
i	14,47

tabela 5.2

Assim, a taxa de 50% a.a. equivale a 14,47% a.b.. Observe que a unidade maior era a semestral e, portanto, foi colocada sob a forma de **FV** (100,00 do principal + 50,00 de juros = **150,00**). O prazo relativo foi **3**, já que um semestre equivale a **3** bimestres. A grande incógnita da questão era a taxa em unidade menor, isto é, o valor de **i**.

Alternativamente, poderíamos fazer tais conversões utilizando fórmulas específicas, como por exemplo:

$$\boxed{\left(1+\frac{i_A}{100}\right)^{1}=\left(1+\frac{i_M}{100}\right)^{12}}$$

quadro 5.4

onde $\mathbf{i_A}$: taxa anual
$\mathbf{i_M}$: taxa mensal

A memorização de fórmulas como a do quadro 5.4 pode ser obtida da seguinte forma. Como **1** ano tem **12** meses, o expoente dos parênteses que contêm a taxa anual é **1**, enquanto que o expoente dos parênteses que contêm a taxa mensal é **12**. O raciocínio também valerá para outras conversões:

$$\left(1+\frac{i_S}{100}\right)^1=\left(1+\frac{i_M}{100}\right)^6 \qquad \left(1+\frac{i_A}{100}\right)^1=\left(1+\frac{i_Q}{100}\right)^3$$

$$\left(1+\frac{i_T}{100}\right)^1=\left(1+\frac{i_M}{100}\right)^3 \qquad \left(1+\frac{i_M}{100}\right)^1=\left(1+\frac{i_D}{100}\right)^{30}$$

quadro 5.5

Vamos recalcular a taxa anual que corresponde a 4% a.m. por uma destas fórmulas. A escolha correta, neste caso, é:

$$\left(1+\frac{i_A}{100}\right)^1=\left(1+\frac{i_M}{100}\right)^{12}$$

quadro 5.6

Assim:

$$\left(1+\frac{i_A}{100}\right)^1=\left(1+\frac{i_M}{100}\right)^{12} \qquad \left(1+\frac{i_A}{100}\right)=1{,}60$$

$$\left(1+\frac{i_A}{100}\right)=\left(1+\frac{4}{100}\right)^{12} \qquad \frac{i_A}{100}=1{,}60-1$$

$$i_S=100\,.\,0{,}60=60{,}10\,\%\ \text{a.a.}$$

quadro 5.7

o que concorda com o resultado obtido anteriormente. Obviamente, para obter esse resultado preciso, não poderemos redigitar números em nossa calculadora. Vejamos agora a conversão de 50% a.s. em taxa bimestral. Neste caso, a fórmula será:

$$\left(1+\frac{i_S}{100}\right)^1=\left(1+\frac{i_B}{100}\right)^3$$

quadro 5.8

Assim:

$$\left(1+\frac{50}{100}\right)^{1}=\left(1+\frac{i_B}{100}\right)^{3}$$

$$1{,}50=\left(1+\frac{i_B}{100}\right)^{3}$$

$$\sqrt[3]{1{,}50}=1+\frac{i_B}{100}$$

$$1{,}14-1=\frac{i_B}{100}$$

$$0{,}14\cdot 100=i_B$$

$$i_B=14{,}47\,\%\text{a.b.}$$

quadro 5.9

o que também concorda com o resultado obtido anteriormente.

5.5 Exercícios

12) Converta as taxas efetivas para taxas anuais efetivas:

a) 1,59% a.m. b) 3,02% a.b. c) 4,32% a.t.
d) 5,00% a.q. e) 6,00% a.s. f) 0,02% a.d.
g) 0,05% a.qi. h) 1,00% em 20 dias

13) Converta as taxas efetivas para taxas mensais efetivas:

a) 5,00% a.b. b) 6,00% a.t. c) 8,21% a.q.
d) 10,00% a.s. e) 12,00% a.a. f) 1,00% a.qi.

14) Complete:

a) 6% a.m. = _____% a.a. b) 28% a.b. = _____% a.a.
c) 84 % a.a. = _____% a.m. d) 150% a.a. = _____% a.t.
e) 9% a.t. = _____% a.b.

15) Um CDB (Certificado de Depósito Bancário) prefixado em 30 dias tem taxa efetiva de 27% a.a. Calcule sua taxa efetiva no período.

16) Um CDB prefixado em 60 dias tem taxa efetiva de 29,5% a.a.. Calcule sua taxa efetiva no período.

17) Um CDB prefixado em 30 dias no valor de R$ 2.000,00 tem taxa efetiva de 35% a.a. Se for cobrada, antecipadamente, a alíquota de 10% sobre os rendimentos brutos para o IR, calcule:

a) a taxa efetiva mensal; b) o rendimento bruto;
c) o total investido; d) o montante retirado;
e) a taxa de juros ganha pelo aplicador.

5.6 Efeito Fisher

A seguir, estudaremos a relação entre taxa efetiva, taxa de inflação e uma taxa real, que deduz o efeito corrosivo desta última.

Exemplo 5.3

Imagine uma aplicação de R$ 100,00 durante 1 mês à taxa de 5% a.m. O montante produzido será R$ 105,00. No entanto, este valor daqui a 1 mês poderá ter valor aquisitivo menor que o mesmo valor na data de hoje, pela possibilidade de haver inflação da nossa moeda. Assim, poderíamos considerar o investimento acima como um investimento sobre o valor corrigido da moeda. Digamos que o índice de inflação (por exemplo, IPC, IGPM, IGP-DI ou INPC) fosse de 1%. Teríamos:

$$100{,}00 \xrightarrow{+1\%} 101{,}00 \xrightarrow{+iR} 105{,}00$$

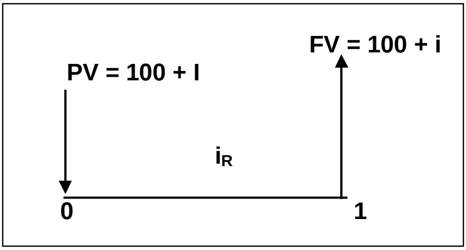
quadro 5.9

e a taxa de ganho real (isto é, ganho acima da inflação) será:

Pressione	Visor
f CLEAR FIN	(mantido)
101 CHS PV	-101,00
105 FV	105,00
1 n	1,00
i	3,96

tabela 5.3

ou seja, 3,96% de taxa real de investimento. Note que usamos o valor atualizado, R$ 101,00 como principal, já que o mesmo tem o mesmo poder aquisitivo de R$ 100,00 há um mês atrás. De uma forma esquemática, podemos ter em mente o seguinte diagrama para cálculos de taxas reais, aparentes e de inflação:



quadro 5.10

onde:

I é a taxa de inflação;

$\mathbf{i_R}$ é a taxa real;

i é a taxa aparente (ou efetiva).

Alternativamente, poderíamos ter usado a fórmula de Fisher:

$$\left(1+\frac{i}{100}\right)=\left(1+\frac{i_R}{100}\right).\left(1+\frac{I}{100}\right)$$

quadro 5.11

Este estudo foi apresentado pelo economista americano Fisher, que se ocupou dos efeitos que a desvalorização da moeda exerce sobre as taxas de juros. Concluímos que a inflação ou a desvalorização do real junto ao dólar corrói o ganho dos investidores, e coloca a taxa de juros efetiva na condição de uma taxa aparente de juros.

5.7 Exercícios

18) Ao se projetar uma inflação anual para 3% e usar a taxa anual para um financiamento de 1 ano de 30%, qual será o ganho estimado da instituição de crédito?

19) Uma financeira quer obter um ganho real de 6% a.m. e estima que a inflação mensal média para o prazo de seus financiamentos não ultrapasse a 0,8%. Assim, qual a taxa que deverá anunciar para seus empréstimos?

20) Um cliente de um banco contrai um empréstimo prefixado a juros de 2% a.m. durante 1 ano. No entanto, a economia daquele país se desestrutura e a moeda se desvaloriza muito em relação ao dólar, o que coloca a inflação anual em 95%. Calcule a taxa anual de perda da instituição bancária.

21) Um investidor desconfia da estabilidade da moeda do país onde faz investimentos e projeta uma inflação mensal de 3% para um mês específico. Assim, se isso ocorrer, qual será o ganho real de um papel que paga juros de 4% naquele mês?

22) Qual a taxa real de um empréstimo sabendo que a taxa efetiva foi de 4% a.m. e considerando que a inflação do mês foi de 1,09%?

23) Um financiamento foi feito sob taxa efetiva de 3,15% a.m. durante 1 ano. Se a inflação projetada para o ano for de 6%, calcule:
a) a taxa anual efetiva do financiamento;
b) a taxa anual real do financiamento;
c) a taxa mensal real do financiamento.

24) Considerando o exercício anterior, o que ocorrerá, em termos reais, caso a inflação anual for de 45,09%, ao contrário das previsões dos economistas?

25) Ainda considerando o exercício 23, o que ocorrerá, em termos reais, caso a inflação anual for de 60%?

5.8 Investimento com Atualização

Quanto mais instável se torna a situação econômica de um país, maior é a freqüência com que suas taxas de juros são vinculadas ao dólar. Assim, diminuem-se os riscos de perdas nos negócios. Assim, as instituições de crédito passam a preferir transações vinculadas ao dólar em vez daquelas que são prefixadas em reais. O governo passa a emitir títulos que corrigem as perdas diárias do mercado (overnight), denominados de LBC's (Letras do Banco Central). Desta forma, as transações financeiras, passam a especificar a taxa real de juros, deixando o trabalho adicional de se corrigir o dinheiro conforme a variação cambial, ou TR (taxa referencial) ou qualquer outro índice de correção da moeda (índices de inflação, por exemplo).

Exemplo 5.4

Uma aplicação de R$ 6.000,00 é feita sob juros de 0,78% a.m. por 7 meses mais variação cambial (VC). Se a VC no período foi de 9,56%, qual foi o montante obtido?

Solução 1:Atualizando antes

Pressione	Visor
f CLEAR FIN	(mantido)
6000 ENTER 9.56% +	6.573,60
CHS PV	-6.573,60
7 n	7,00
0.78 i	0,78
FV	6.941,03

tabela 5.4

Solução 2: Atualizando depois

Pressione	Visor
f CLEAR FIN	(mantido)
6000 CHS PV	6.000,00
7 n	7,00
0.78 i	0,78
FV	6.335,37
9,56 % +	6.941,03

tabela 5.5

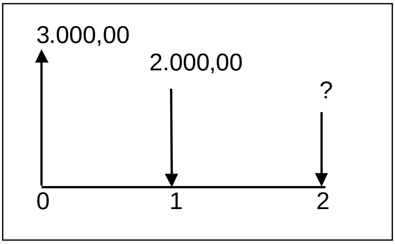
Conclusão: Podemos atualizar o capital antes ou depois de ser aplicada a taxa efetiva de juros.

Exemplo 5.5

Um empréstimo de R$ 3.000,00 é feito para se pagar em duas parcelas, sendo que a primeira daqui a 1 mês e a segunda daqui a 2 meses. Se o dinheiro for apenas corrigido pela TR mensal e se a primeira parcela for de R$ 2.000,00, calcule o valor da segunda parcela, dados os valores, em %, das TR's para o primeiro e segundo mês, respectivamente, 0,71 e 0,85.

Solução:

O diagrama de fluxos de caixa do exemplo será:



quadro 5.12

Pressione	Visor
3000 ENTER 0.71 % +	3.021,30
2000 -	1.021,30
0.85 % +	1.029,98

tabela 5.6

Logo, a segunda parcela será de R$ 1.029,98. Observe que a TR *só incide sobre o valor da dívida atual. Caso a taxa de juros cobrada pelo empréstimo fosse de 1% acima de TR, teríamos:*

Pressione	Visor
3000 ENTER 0.71 % +	3.021,30
1 % +	3.051,51
2000 -	1.051,51
0.85 % +	1.060,45
1 % +	1.071,06

tabela 5.7

5.9 Exercícios

26) Uma LBC de prazo 30 dias é anunciada pagando juros de 2% a.m. acima das perdas no câmbio. Se o título foi adquirido por R$ 300,00 e a variação cambial do período de um mês foi de 0,3%, calcule o valor do título na recompra.

27) Um financiamento foi feito sob certa taxa de juros mais VC. Se as prestações mensais, desconsiderando a VC, ficaram em 4 parcelas de R$ 100,00, calcule o valor atualizado das parcelas, caso a VC tenha um comportamento como o da tabela abaixo (em %):

mês	1	2	3	4
VC (%)	0,912	0,812	0,777	0,810

tabela 5.8

28) Considerando o exercício anterior, qual foi a variação cambial dos quatro meses acumulada?

29) Um financiamento foi feito sob certa taxa de juros mais TR. Se as prestações mensais, sem a TR, ficaram em 4 parcelas de R$ 200,00 e dada a tabela da TR, em %, para os quatro meses, calcule:

mês	1	2	3	4
TR (%)	0,615	0,713	0,668	0,791

tabela 5.9

a) o valor pago pelas prestações;
b) o valor acumulado da TR para os quatro meses;

30) Um financiamento foi feito sob certa taxa de juros mais VC. Se as prestações mensais, desconsiderando a VC, ficaram em 4 parcelas de R$ 100,00, calcule o valor atualizado das parcelas, caso a VC tenha um comportamento como o da tabela abaixo (em %):

mês	1	2	3	4
VC (%)	20,143	37,683	19,234	28,789

tabela 5.10

5.10 RESPOSTAS

1) 5,83% a.m.

2) 3,00% a.m.

3)
a- 6,00% a.m.
b- R$ 1.619,57

4)
a- 5,00% a.m.
b- R$ 9.675,30

5)
banco A: 4,00% a.m.
banco B: 3,50% a.m.
banco C: 3,92% a.m.
melhor opção é o banco A, seguida do banco C.

6) 30,64% a.a. capitalizados mensalmente

7) 12,94% a.s. capitalizados bimestralmente

8) 28,03% a.a. capitalizados mensalmente

9) 15,04% a.m. capitalizados diariamente

10) 3,10% a.m.

11) 1,61% a.m. e
19,33% a.a. capitalizados mensalmente

12)
a- 20,84% a.a.
b- 19,54% a.a.
c- 18,43% a.a.
d- 15,76% a.a.
e- 12,36% a.a.
f- 7,46% a.a.
g- 1,21% a.a.
h- 19,61% a.a.

13)
a- 2,47% a.m.
b- 1,96% a.m.
c- 1,99% a.m.
d- 1,60% a.m.
e- 0,95% a.m.
f- 2,01% a.m.

14)
a- 101,22% a.a.
b- 339,80% a.a.
c- 5,21% a.m.
d- 25,74% a.t.
e- 5,91% a.b.

15) 2,01% a.m.

16) 4,40%

17)
a- 2,53% a.m.
b- R$ 50,65
c- R$ 2.005,06
d- R$ 2.050,65
e- 2,27% a.m.

18) 26,21% a.a.

19) 6,85% a.m.

20) 34,96% a.a.

21) 0,97% a.m.

22) 2,88% a.m.

23) a- 45,09% a.a
b- 36,88% a.a.
c- 2,65% a.m.

24) Não haverá nem perda nem ganho para ambas partes.

25) A instituição financeira terá perda de 9,32% a.a.

26) R$ 306,92

27)

mês	prestação
1	100,91
2	101,73
3	102,52
4	103,35

28) 3,35%

29) a-

mês	prestação
1	201,23
2	202,66
3	204,02
4	205,63

b- 2,82%

30) a-

mês	prestação
1	120,14
2	165,42
3	197,23
4	254,01

b- 154,01%

6. Parcelamentos

6.1 Introdução

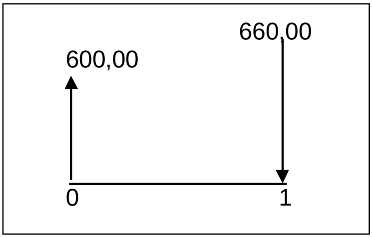
O objetivo deste capítulo é o de estudar os parcelamentos que são efetuados no mercado segundo o sistema das prestações iguais, também conhecido como sistema francês de amortização ou Tabela Price. Antes disso, vamos apresentar o sistema de amortizações iguais, que era muito utilizado no passado devido à sua simplicidade matemática de cálculo e foi abandonado graças à popularização das máquinas financeiras. Antes delas, era difícil o cálculo do valor das prestações iguais que correspondiam a uma taxa de juros específica, conforme comprovaremos, pois estudaremos a sua fórmula principal. Esta tem sido a maneira tradicional de se estudar a matemática financeira. Em seguida, vamos apresentar diversas modalidades de parcelamentos, sem entrada, com entrada, com carência, etc, todos acompanhados pelos recursos operacionais da calculadora HP-12C, que pode ser considerada a maneira alternativa e prática no estudo da matemática financeira.

6.2 O que é Amortização?

Quando contraímos uma dívida, temos que pagar, além dos juros, obviamente o principal emprestado. O pagamento deste principal chamamos de *amortização*. A palavra amortização pode ser entendida como a diminuição da dívida, de uma única vez ou aos poucos, em mais vezes.

Exemplo 6.1

Um empréstimo de R$ 600,00 será pago daqui a 1 mês com a taxa de juros de 10% a.m.. Assim, o diagrama de fluxos de caixa correspondente será:



quadro 6.1

O total pago na data 1 será de R$ 660,00, que pode ser considerado como a soma da amortização do principal (R$ 600,00) mais os juros do período (R$ 60,00). Neste caso, a amortização foi feita de uma única vez, mas nosso interesse maior estará nos casos onde a mesma será parcelada, conforme as prestações.

6.3 Sistema de Amortizações Iguais

Neste sistema de financiamento, o principal é amortizado periodicamente em partes iguais.

Exemplo 6.2

Uma dívida de R$ 600,00 será amortizada em 3 meses, considerando a mesma taxa de juros de 10% a.m.. Assim:

$$\boxed{\text{amortização} = \frac{600{,}00}{3} = 200{,}00}$$

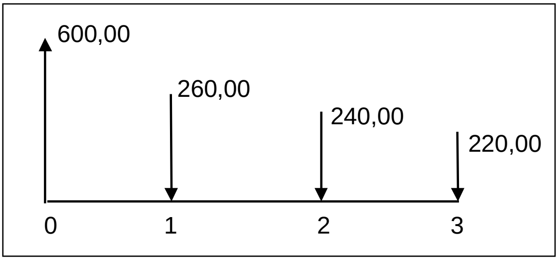
quadro 6.2

O saldo devedor deverá ser atualizado 10% mensalmente e o valor pago será o valor da amortização (R$ 200,00) mais os juros do período:

mês	amortização	juros	prestação	dívida atual
0	-	-	-	600,00
1	200,00	60,00	260,00	400,00
2	200,00	40,00	240,00	200,00
3	200,00	20,00	220,00	zero

tabela 6.1

Em diagrama de fluxos de caixa:



quadro 6.3

As vantagens deste sistema são:

1) as prestações são decrescentes, o que pode dar uma boa impressão ao mutuário (devedor); 2) o cálculo das prestações dispensa o uso de fórmulas complicadas ou de máquinas financeiras, sendo de fácil manuseio para prazos curtos; 3) o valor total dos juros pagos em reais é menor, comparando-se ao sistema de prestações iguais com a mesma taxa de juros.

quadro 6.4

No entanto, a principal desvantagem é que, as prestações são sempre desiguais, o que pode tornar o cálculo trabalhoso quando o financiamento for feito num prazo maior.

6.4 Exercícios

1) Complete a tabela a seguir usando o sistema de amortizações iguais.

Principal				R$ 5.000,00
Taxa de juros				2% a.m.
Prazo				4 meses
Amortização mensal				
mês	juros	amortização	prestação	dívida atual
0				
1				
2				
3				
4				zero

tabela 6.2

2) Complete a tabela a seguir usando o sistema de amortizações iguais. Represente o diagrama de fluxos de caixa correspondente.

Principal				
Taxa de juros				
Prazo				4 meses
Amortização mensal				
mês	juros	amortização	prestação	dívida atual
0				4.000,00
1	200,00			
2				
3				
4				zero

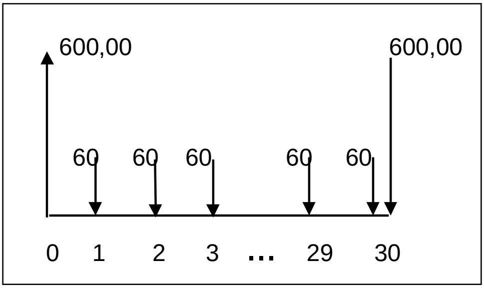
tabela 6.3

6.5 Sistema Americano de Amortizações

Este é o sistema do financiamento de nossa dívida externa. Os juros são pagos periodicamente (anualmente) e o principal é amortizado de uma única vez, ao final do empréstimo.

Exemplo 6.3

Considerando um título de US$ 600,00 que paga 10% a.a. de juros e vence em 30 anos, teremos anualmente juros de 10% sobre o valor de face do título (10% de US$ 600,00 = US$ 60,00) e, no prazo de resgate serão pagos os juros e amortizado o principal. Este sistema de pagamentos já foi abordado no capítulo 3, no estudo dos títulos públicos e privados.



quadro 6.4

6.6 Exercícios

3) Um título da dívida externa paga juros anuais de 15% do valor de face, que é de US$ 2.000.000,00. Represente o diagrama de fluxos de caixa correspondente, sabendo que seu prazo é de 30 anos, supondo ter sido adquirido sem ágio nem deságio.

4) Repetir o problema anterior, supondo deságio de 20% do valor de face no ato de sua aquisição.

6.7 Sistema de Prestações Iguais

Uma das maiores vantagens deste método é a de que se pagam juros e amortizações mensais de modo que as prestações não se alteram ao longo do financiamento. Isso é possível graças a uma matemática mais elaborada, o que ficou popular após o advento das máquinas financeiras de cálculo.

Exemplo 6.4

Um financiamento de R$ 600,00 é pago a juros de 10% a.m. durante o prazo de 3 meses, quando as prestações mensais são iguais a R$ 241,27. Para tanto, considere a tabela seguinte:

mês	juros	prestação	amortização	dívida atual
0	-	-	-	600,00
1	60,00	241,27	181,27	418,73
2	41,87	241,27	199,40	219,33
3	21,93	241,27	219,33	zero

tabela 6.4

No primeiro mês, os juros foram calculados em R$ 60,00, o que eqüivale a 10% do valor da dívida no mês inicial (mês zero). Como a prestação é fixa em R$ 241,27, o valor amortizado será a diferença entre esta e o valor dos juros: 241,27 – 60,00 = 181,27. Assim, a dívida que era de R$ 600,00 será amortizada de R$ 181,27, passando a representar R$ 418,73. Seguindo o mesmo raciocínio para os meses seguintes, temos que no último mês, a dívida ficará em zero (ou aproximadamente isso, devido a arredondamentos), o que confirma que as prestação iguais de R$ 241,27 quitam a dívida no prazo e na taxa indicados.

Tudo ocorreu perfeitamente, mas não explicamos como chegamos ao valor da prestação, R$ 241,27. Este caminho era bastante penoso antes das máquinas financeiras:

$$\boxed{PMT = COEF_{n \neg i} . PV}$$

quadro 6.5

onde:

PMT = valor das prestações

$COEF_{n \neg i}$ = coeficiente de financiamento

PV = valor financiado

A fórmula do coeficiente será:

$$\boxed{COEF_{n \neg i} = \frac{\left(1 + \frac{i}{100}\right)^n . \frac{i}{100}}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)^n - 1}}$$

quadro 6.6

onde:

$COEF_{n \neg i}$ = coeficiente de financiamento

i = taxa de juros

n = número de parcelas

Vamos agora obter o valor R$ 241,27 através das fórmulas dos quadros 6.5 e 6.6.

$$COEF_{3 \neg 10} = \frac{\left(1 + \frac{10}{100}\right)^3 . \frac{10}{100}}{\left(1 + \frac{10}{100}\right)^3 - 1} = 0{,}40211480$$

$$PMT = 0{,}40211480 \cdot 600 = 241{,}27$$

quadro 6.7

A principal desvantagem deste método é a de que para taxas muito altas e/ou prazos muito longos, a dívida é muito pouco amortizada nas prestações iniciais.

6.8 Exercícios

5) Complete a tabela abaixo, considerando o sistema de prestações iguais.

Principal				R$ 5.000,00
Taxa de juros				2% a.m.
Prazo				4 meses
Prestação mensal				
mês	juros	prestação	amortização	dívida atual
0				
1				
2				
3				
4				zero

tabela 6.5

6) Complete a tabela abaixo, considerando o sistema de prestações iguais. Represente o fluxo de caixa correspondente.

Principal				R$ 1.000,00
Taxa de juros				6% a.m.
Prazo				4 meses
Prestação mensal				
mês	juros	prestação	amortização	dívida atual
0				
1				
2				
3				
4				zero

tabela 6.6

7) Considere um financiamento em 6 vezes iguais sem entrada de um bem no valor de R$ 700,00 à taxa de juros de 4% a.m.. Determine:
a) o coeficiente do financiamento;
b) o valor das prestações;
c) o diagrama de fluxos de caixa.

8) Setenta porcento do valor de um automóvel será financiado em 24 vezes iguais mensais sob juros de 3% a.m.. Se o automóvel custa R$ 20.000,00 determine:
a) o valor da entrada;
b) o valor financiado;
c) o coeficiente da transação;
d) o valor das prestações;
e) o diagrama de fluxos de caixa.

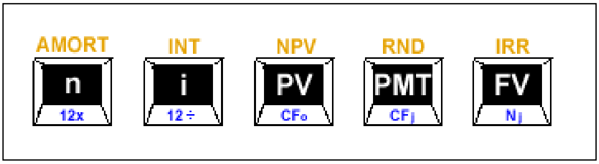
6.9 Dificuldades do Sistema de Prestações Iguais

Pelo que se pode notar, a maior dificuldade do sistema de prestações iguais está na aplicação de sua fórmula. Como se isso não bastasse, tal dificuldade se acentua para os casos em que as incógnitas são o prazo e a taxa de juros. Se o financiamento for feito de modo que a primeira prestação for dada de entrada, e não daqui a 1 mês, necessitaríamos demonstrar uma segunda fórmula. Devido a estes e outros motivos, resolvemos dar um salto nestes tópicos e apresentá-los somente com os recursos da máquina HP-12C. Caso necessite de um embasamento teórico nestes assuntos, consulte a bibliografia.

6.10 Utilizando a HP-12C

Tudo o que foi visto anteriormente, apesar das simplificações e de alterações no modo de ensinar - por exemplo, com coeficientes e não com fatores de atualização como rezam os livros de Matemática Financeira - serviu-nos para a fixação dos conceitos desenvolvidos e para que o aluno saiba se virar sem a calculadora financeira. Obviamente, uma calculadora especialmente projetada para ser usada no mercado financeiro deve poupar o usuário de muitas complicações algébricas estudadas, pois alternativas devem ser calculadas e confrontadas em curtos espaços de tempo no dia-a-dia de um analista financeiro, por exemplo.

Vamos utilizar agora todos os registradores financeiros disponíveis em sua calculadora HP-12C, isto é, as 5 teclas superiores à esquerda na máquina, conforme vemos na figura do quadro 6.8:



quadro 6.8

onde:

n = número de parcelas
i = taxa percentual de juros
PV = principal valor
PMT = pagamento periódico
FV = futuro valor (residual)

6.11 Modo End

Este modo recebeu este nome porque o primeiro pagamento é feito no final (end, em inglês) de um mês, ao contrário do modo que estudaremos em seguida. Financiamentos pelo modo end foram apresentados anteriormente utilizando fórmulas. Para operá-lo em sua calculadora, certifique-se que não aparece no visor a indicação **BEGIN** (se aparecer, digite **g END**).

Exemplo 6.5

Qual o valor das prestações de um financiamento de R$ 600,00 em 3 vezes iguais sem entrada a juros de 10% a.m.?

Solução:

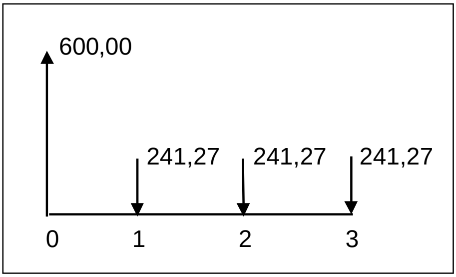
Este exemplo foi resolvido anteriormente através de fórmulas. Vamos resolvê-lo alternativamente através de nossa calculadora. Inicialmente, reconheçamos as variáveis fornecidas:

PV = 600
n = 3 meses
i = 10% a.m.

Pressione	Visor
f CLEAR FIN	(mantido)
600 PV	600,00
3 n	3,00
10 i	10,00
PMT	-241,27

tabela 6.7

Entenda que o valor da prestação aparece negativo devido ao fato de corresponder a uma saída de dinheiro, enquanto que o principal foi digitado positivo. Na verdade, consideramos o diagrama de fluxos de caixa para o tomador de dinheiro, mas nada nos impede de fazer o contrário (neste caso, digitando **PV** negativo e obtendo uma resposta positiva para **PMT**).



quadro 6.9

6.12 Exercícios

9) Um aparelho de som de valor R$ 574,00 foi financiado em 24 vezes iguais mensais sem entrada, com juros de 8,4% a.m.. Qual o valor das prestações?

10) Um veículo de R$ 14.900,00 foi comprado com uma entrada de 30% e o restante financiado a juros de 3,9% a.m. em 36 prestações iguais mensais. Qual o valor das prestações?

11) Qual o coeficiente para um financiamento a juros de 3% a.m. em 15 vezes iguais sem entrada? Dica: Faça **PV** igual a 1,00; o coeficiente será, então, o valor a ser fornecido pelo registrador **PMT**.

12) Qual o coeficiente para um financiamento em 18 vezes iguais sem entrada sob juros de 1,65% a.m.?

13) Uma tabela de coeficientes deverá ser obtida de modo a respeitar os seguintes critérios:
i) sem juros para prazos de 1 a 3 meses;
ii) juros de 2% a.m. para prazos de 4 a 7 meses;
iii) juros de 3% a.m. para prazos de 8 a 12 meses;
iv) juros de 5,5% a.m. para prazos de 13 a 24 meses.
Sabendo que o modo a ser considerado é o *end*, monte a tabela desejada. Dica: digite **f CLEAR FIN** uma única vez e vá modificando as variáveis financeiras conforme as condições necessárias.

14) Consultando a tabela obtida anteriormente, existem 2 prazos de parcelamentos que são visivelmente desvantajosos. Você saberia identificá-los e explicar o motivo?

15) Qual é a taxa de juros de um financiamento de R$ 430,00 em 5 prestações de R$ 102,00 iguais e sem entrada?

16) Qual a taxa de juros cobrada num financiamento de um aparelho de som no valor de R$ 1.200,00 em 12 pagamentos iguais mensais de R$ 147,88 sem entrada?

17) Um vendedor opera com um coeficiente de 0,14569 para financiamento em 10 vezes sem entrada (0 + 10). Qual a taxa mensal deste financiamento?

18) Um financiamento é feito conforme a *Tabela Price* a juros de 48% a.a. (taxa nominal capitalizada ao mês). Calcule o valor das 24 prestações mensais sem entrada para um financiamento de R$ 4.000,00

6.13 Modo Begin

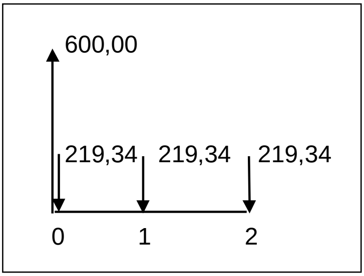
Este modo recebeu este nome pelo fato de o tomador do empréstimo começar a pagar as prestações no início (begin, em inglês) do financiamento, e não após 1 mês do mesmo. Na HP-12C, basta colocar a máquina no modo begin (apertando as teclas **g BEG**) e digitar os valores normalmente. Atenção: O visor da calculadora deverá mostrar durante todo o tempo as inscrições **BEGIN**. Isso somente irá desaparecer se retornarmos ao modo end através das teclas **g END**. Lembre-se de que a entrada deverá ser igual ao valor mensal das demais prestações para se utilizar este modo.

Exemplo 6.6

Qual o valor das prestações de um financiamento de R$ 600,00 em 3 vezes iguais (1 + 2) a juros de 10% a.m.?

Pressione	Visor
f CLEAR FIN	(mantido)
g BEG	(aparece o BEGIN)
600 PV	600,00
3 n	3,00
10 i	10,00
PMT	-219,34

tabela 6.8



quadro 6.10

Observe que o valor financiado, na realidade, será menor do que R$ 600,00, já que o tomador está dando uma entrada de R$ 219,34. Mesmo o financiamento acabando em 2 meses, a variável **n** conterá o número de parcelas (isto é, 3) e não o prazo. Novamente, o valor de **PMT** resulta negativo por representar uma saída de dinheiro (no caso do diagrama de fluxos de caixa para o tomador representado anteriormente).

6.14 Exercícios

19) Um equipamento eletrônico custa R$ 3.000,00 à vista e pode ser financiado em 12 vezes (1 + 11) a juros de 3,5% a.m.

a) Qual o valor de cada prestação?

b) Represente o diagrama de fluxos de caixa para o tomador do empréstimo.

20) Um armário no valor de R$ 990,00 pode ser financiado em 18 vezes (1 + 17) iguais mensais sob juros de 7,2% a.m..

a) Calcule o valor das prestações.

b) Monte o diagrama de fluxos de caixa para a empresa que irá emprestar o dinheiro.

21) Qual o coeficiente de um financiamento em 10 vezes (1 + 9) a juros de 1,4% a.m.? Dica: Faça **PV** igual a 1,00; o coeficiente será, então, o valor a ser fornecido pelo registrador **PMT**.

22) Qual a taxa de juros cobrada para uma piscina modular cujo valor à vista é de R$ 40,00 e está sendo financiada em 3 vezes (1 + 2) prestações iguais de R$ 16,50?

23) Qual a taxa de juros para um financiamento de R$ 840,00 em 15 vezes (1 + 14) iguais mensais de R$ 71,99?

24) Qual a taxa embutida para um financiamento quando o coeficiente do mesmo for 0,05756 e o número de parcelas igual a 36 (1 + 35)?

25) Uma tabela de coeficientes deverá ser obtida de modo a respeitar os seguintes critérios:

i) sem juros para prazos de 1 a 3 meses;

ii) juros de 2% a.m. para prazos de 4 a 7 meses;

iii) juros de 3% a.m. para prazos de 8 a12 meses;

iv) juros de 5,5% a.m. para prazos de 13 a 24 meses.

a) Sabendo que o modo a ser considerado é o begin, obtenha tais coeficientes e monte a tabela desejada.

b) Compare os resultados com os obtidos no exercício 13 e justifique as diferenças;

c) Identifique os prazos desvantajosos.

6.15 Modo com Carência

Chamamos carência ao prazo que decorre do ato do financiamento até o pagamento da primeira prestação. Assim, podemos dizer que o modo de financiamento end apresenta carência de 30 dias, já que o tomador do empréstimo começa a amortizá-lo depois de 30 dias. Podemos dizer também que no modo begin, não há carência ou há carência nula. No entanto, nosso interesse aqui repousa sobre os casos onde a carência é diferente de zero ou de 30 dias, por exemplo, 45 dias, 60 dias, 90 dias, etc.

Para resolver tais problemas, vamos colocar a máquina no modo **BEGIN** (teclas **g BEG**) e atualizar o principal da operação até a data da primeira prestação segundo a taxa de juros. Vejamos dois exemplos.

Exemplo 6.7

Um magazine anuncia que uma cômoda no valor de R$ 560,00 pode ser financiada em 4 vezes sob juros de 3% a.m. com o primeiro pagamento para daqui a 60 dias. Calcule o valor de tais prestações.

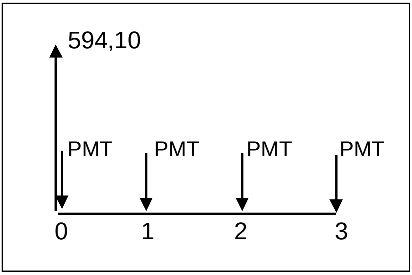
Solução.

Neste caso, vamos atualizar o principal (R$ 560,00) até a data do 1º pagamento:

Pressione	Visor
560 ENTER	560,00
3% +	576,80
3% +	594,10

tabela 6.9

Assim, podemos considerar o seguinte diagrama de fluxos de caixa adaptado:



quadro 6.11

Pressione	Visor
f CLEAR FIN	(mantido)
g BEG	(BEGIN)
594,10 PV	594,10
4 n	4,00
3 i	3,00
PMT	-155,17

tabela 6.10

Logo, o valor das prestações ficam em R$ 155,17.

Exemplo 6.8
Um financiamento pode ser feito com carência de 20 dias em 6 vezes com juros de 3,5% a.m.. Qual o coeficiente da operação?
Solução:
*Vamos aqui seguir a dica dada nos exercícios 11 e 21, de colocar o valor de **PV** igual a **1,00** e obter o coeficiente no registrador **PMT**. Isso é válido porque, considerando a fórmula do quadro 6.5, quando **PV** é unitário, o **PMT** se torna o próprio coeficiente. Neste caso, o principal (1,00) deverá ser atualizado para 20 dias. Assim, é melhor usar os registradores financeiros para tal:*

Pressione	Visor
f CLEAR FIN	(mantido)
1 PV	1,00
3.5 i	3,50
20 ENTER 30 ÷	0,67
FV	-1,02

tabela 6.11

*Verifique se o indicador **C** da convenção exponencial para prazos fracionários está acesso no visor antes de digitar a tabela anterior. Casso contrário, pressione **STO EEX**. Observe que o valor fornecido de **FV** o arredonda em duas casas decimais, mas a calculadora* *mantém as demais casas.*

Pressione	Visor
f CLEAR FIN	(mantido)
CHS PV	-1,02
3.5 i	3,50
6 n	6,00
PMT	-0,19
f 5	-0,18553

tabela 6.12

*Em seguida, limpamos novamente os registradores financeiros, o que não limpa o visor e armazenamos este número no registrador **PV**.Assim, o coeficiente do financiamento será o valor fornecido por **PMT**, o que, com 5 casas decimais, resultou em 0,18553.*

6.16 Exercícios

26) Um estofado no valor à vista de R$ 800,00 é comprado em 4 vezes com o primeiro pagamento para daqui a 90 dias. Se a taxa de juros considerada é de 3,7% a.m.:
a) Qual o valor das parcelas?
b) Neste caso, qual será o coeficiente com que trabalha o vendedor?

27) Um financiamento de R$ 900,00 é feito no dia 25 de março de 1999, sob juros de 2 % a.m., em 7 vezes iguais sem entrada para se começar a pagar em 6 de abril do mesmo ano.
a) calcule a carência;
b) calcule o valor das parcelas;
c) monte o diagrama de fluxos de caixa original;
d) monte o diagrama de fluxos de caixa modificado.

28) Qual o coeficiente de um plano com carência de 45 dias, juros de 4,8% a.m. e 10 parcelas mensais iguais?

29) Com o coeficiente 0,10348, um comerciante trabalha com juros de 3% a.m. em 12 prestações mensais. Qual a carência embutida em tal coeficiente?

30) Qual a carência de um financiamento de coeficiente 0,15511, juros de 5% a.m. e 9 parcelas mensais iguais?

31) Qual a carência de um financiamento de coeficiente 0,15329, juros de 3,85% a.m. e 8 parcelas mensais iguais?

32) Qual o prazo para um financiamento com carência de 40 dias, juros de 2,3% a.m. e coeficiente de 0,08019?

33) Qual o prazo para um financiamento com carência de 100 dias, juros de 3,3% a.m. e coeficiente de 0,06577?

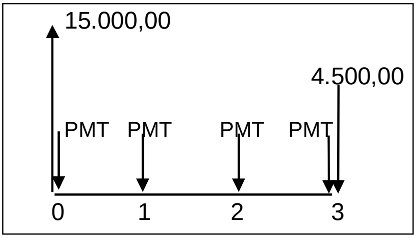
6.17 Valor Residual

Em muitos financiamentos, após se pagar a última parcela, continua-se com um determinado valor de débito ou de crédito. É o chamado valor residual. Vamos considerar a referência para quem está pagando o financiamento. Assim, um valor residual de débito significará que após pagar a última prestação, ficou ainda uma dívida não amortizada pelas prestações anteriores. Tal situação ocorre em alguns contratos de leasing onde 30% do valor do bem ficam como opção de compra do bem no final das prestações.

Por causa de nossa calculadora, vamos definir valor residual ao valor que fica em débito ou crédito para o cliente no mês da última prestação paga.

Exemplo 6.9

Um automóvel no valor de R$ 15.000,00 é financiado pelo leasing com 30% de valor residual no final do financiamento e em quatro pagamentos iguais sob juros de 5% a.m.. Logo, no quarto mês, além da prestação normal, temos ainda um débito de R$ 4.500,00, geralmente a ser pago caso o cliente resolva adquirir o veículo.



quadro 6.12

Para o obter o valor das prestações mensais, temos que usar o registrador financeiro **FV** como valor residual.Como percebemos pelo gráfico do quadro 6.12, tal valor deverá ser digitado negativo:

Pressione	Visor
f CLEAR FIN	(mantido)
g END	(modo END)
15000 PV	15.000,00
4 n	4,00
5 i	5,00
4500 CHS FV	-4.500,00
PMT	-3.186,12

tabela 6.13

Observe, então, que, devido à taxa de juros, o valor financiado, descontado do valor residual, é maior que 70% do preço do bem. Para obtê-lo, basta zerar o registrador **FV** e pressionar a tecla **PV**:

Pressione	Visor
0 FV	0,00
PV	11.297,84

tabela 6.14

Isso corresponde a 75,32% do valor do bem.

6.18 Exercícios

34) Um automóvel no valor de R$ 14.000,00 deverá ser financiado pelo leasing de modo que 30% deste valor fique em débito residual após as 24 parcelas iguais mensais. Se a taxa do financiamento é de 1,1% a.m.:

a) Determine o valor das prestações mensais.
b) Monte o diagrama de fluxos de caixa correspondente.
c) Encontre o percentual efetivo financiado, descontando o valor residual.

35) Uma financeira anuncia que a taxa de juros cobrada em seus financiamentos é de 4% a.m.. Um cliente toma emprestado R$ 1.000,00 e assume as 6 parcelas mensais subseqüentes ao empréstimo iguais de R$ 206,57. Após o pagamento da última prestação, percebe que foi enganado quanto à taxa de juros cobrada e entra com um processo na Justiça contra a financeira, que agora deverá restituir o valor pago corrigido para o cliente neste mês. Determine:

a) a taxa de juros efetivamente cobrada;
b) o valor a ser restituído para o cliente (valor residual de crédito).

6.19 Correção Monetária

Para os financiamentos vistos até aqui, a taxa de juros cobrada deverá conter um ganho líquido acima da inflação ou da desvalorização da nossa moeda junto ao dólar. Numa economia estável, isso não é difícil de acontecer, o que possibilitou os financiamentos em prestações fixas em reais durante os 5 primeiros anos do nosso Plano Real, com taxas de juros relativamente baixas. Por outro lado, consegue-se financiar dívidas em taxas ainda menores, caso as prestações de tais financiamentos sejam corrigidas periodicamente por algum índice de variação de preços ou a própria moeda americana (os chamados financiamentos fixos em dólar). Vejamos a seguir alguns destes índices:

TR (Taxa Referencial de Juros)

Criada durante o governo Collor, é divulgada diariamente pelo Banco Central e reflete a taxa média mensal de captação dos bancos comerciais, como ocorre também na Inglaterra com a taxa LIBOR (London Interbank Offered Rate). Assim, está diretamente relacionada com as taxas negociadas pelos CDBs (Certificados de Depósitos Bancários) negociados pelos bancos. O rendimento da caderneta de poupança é calculado a partir desta taxa.

IGP-di (Índice Geral de Preços – disponibilidade interna)
Este índice é divulgado mensalmente pela Fundação Getúlio Vargas do Rio de Janeiro e é o mais usado nas transações financeiras. Tal índice reflete o aumento ou diminuição dos preços ao consumidor, isto é, funciona como um termômetro da inflação ou deflação da economia brasileira.

Exemplo 6.10
Um empréstimo de R$ 5.000,00 foi contraído sob juros de 2,5% a.m. + TR e será amortizado em 3 prestações mensais. Calcule:
a) o valor das prestações sem a correção monetária;
b) o valor das prestações mensais corrigidas pela TR, sabendo que a TR nestes três meses ficou em:

mês	1	2	3
TR (%)	0,3949	0,4512	0,8892

tabela 6.15

c) a TR acumulada neste trimestre.
Solução:
a) A partir da calculadora HP-12C, chegou-se a PMT = 1.750,69.

b) Corrigindo a prestação pela TR, teremos:

Pressione	**Visor**	**Significado**
CHS	1.750,69	sem correção
0.3949 % +	1.757,60	1ª prestação
0.4512 % +	1.765,53	2ª prestação
0.8892 % +	1.781,23	3ª prestação

tabela 6.16

c) No trimestre, podemos usar a própria variação percentual das prestações como indicador de tal variação:

Pressione	Visor
1750.69 ENTER	1.750,69
1781.23 Δ%	1,7445

tabela 6.17

Logo, tal variação foi de 1,7445% (TR acumulada no trimestre).

Exemplo 6.11
Um financiamento de R$ 2.000,00 foi feito conforme a taxa de 1% a.m. + VC (Variação Cambial do dólar) a ser amortizado em 3 prestações mensais. Calcule:
a) o valor das prestações corrigidas pelo dólar, se as cotações em reais do dólar eram as seguintes:

mês	0	1	2	3
US$ 1,00	R$ 1,14	R$ 1,17	R$ 1,27	R$ 1,48

tabela 6.18

b) a variação do dólar acumulada no trimestre.

Solução 1: Converter depois
a) Através da HP-12C, PMT = R$ 680,04.
Para obter as prestações, temos que considerar as variações do dólar:

Pressione	Visor	Significado
1,14 ENTER 1,17 Δ%	2,63	1ª Δ% dólar
1,17 ENTER 1,27 Δ%	8,55	2ª Δ% dólar
1,27 ENTER 1,48 Δ%	16,54	3ª Δ% dólar
RCL PMT CHS	680,04	sem correção
2.63 % +		1ª prestação
8.55 % +		2ª prestação
16.54 % +		3ª prestação

tabela 6.19

c)

Pressione	**Visor**
1,14 ENTER	1,14
1,48 Δ%	29,82

tabela 6.20

Logo, a variação no trimestre foi de 29,82%.

Solução 2: Fixar em dólar:
R$ 2.000,00 = US$ 1.754,39 pois:

Pressione	**Visor**
2000 ENTER	2.000,00
1,14 ÷	1.754,39

tabela 6.21

*Depois disso, calculamos o valor de **PMT** em dólares: US$ 596,53 através da metodologia normal de cálculo, colocando no registrador **PV** o valor de US$ 1.754,39. Assim, todas as prestações serão iguais a US$ 596,53, bastando, então, fazer a conversão para o real no dia dos pagamentos:*

Pressione	**Visor**	**Significado**
RCL PMT CHS	596,53	prestação em dólares
1,17 x	697,94	1ª prestação em reais
RCL PMT CHS	596,53	prestação em dólares
1,27 x	757,59	2ª prestação em reais
RCL PMT CHS	596,53	prestação em dólares
1,48 x	882,86	3ª prestação em reais

tabela 6.22

Nota : As pequenas diferenças com relação à solução anterior são devidas aos arredondamentos cometidos na mesma.

6.20 Exercícios

36) Qual o valor das prestações em reais de um financiamento de R$ 4.000,00 em 5 vezes sob taxa de juros de 1,2% a.m. + TR, se esta teve o seguinte comportamento nos cinco meses em que se deu a amortização:

mês	1	2	3	4	5
TR (%)	0,4786	0,5452	0,6786	0,7690	0,6665

tabela 6.23

37) Calcule a TR acumulada para o exercício 36:
a) dos cinco meses;
b) dos dois primeiros meses;
c) dos dois últimos meses;
d) dos três últimos meses.

38) Um financiamento de R$ 4.400,00 é feito conforme juros de 0,5% + VC e é amortizado em 4 parcelas mensais. Abaixo, seguem as cotações em reais do dólar para os dias em que se efetuaram os pagamentos das prestações:

mês	0	1	2	3	4
US$ 1,00	R$ 1,23	R$ 1,34	R$ 1,56	R$ 1,89	R$ 2,05

tabela 6.24

Calcule:
a) o valor das prestações sem a correção monetária;
b) o valor das prestações fixas em dólar;
c) o valor das prestações em reais;
d) a variação cambial do quadrimestre.

6.21 Respostas

1)

Principal	R$ 5.000,00
Taxa de juros	2% a.m.
Prazo	4 meses
Amortização mensal	**R$ 1.250,00**

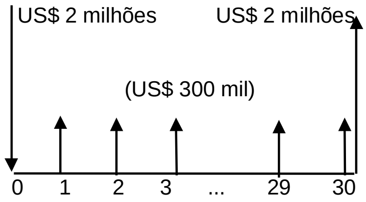
mês	juros	amortização	prestação	dívida atual
0				**5.000,00**
1	**100,00**	**1.250,00**	**1.350,00**	**3.750,00**
2	**75,00**	**1.250,00**	**1.325,00**	**2.500,00**
3	**50,00**	**1.250,00**	**1.300,00**	1.250,00
4	**25,00**	**1.250,00**	**1.275,00**	zero

2)

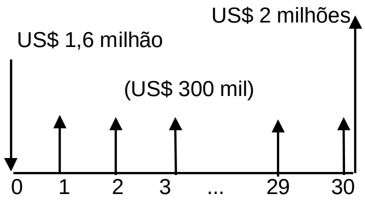
Principal	**R$ 4.000,00**
Taxa de juros	**5% a.m.**
Prazo	4 meses
Amortização mensal	**R$ 1.000,00**

mês	juros	amortização	prestação	dívida atual
0				4.000,00
1	200,00	**1.000,00**	**1.200,00**	**3.000,00**
2	**150,00**	**1.000,00**	**1.150,00**	**2.000,00**
3	**100,00**	**1.000,00**	**1.100,00**	1.000,00
4	**50,00**	**1.000,00**	**1.050,00**	zero

3)



4)



5)

Principal	R$ 5.000,00
Taxa de juros	2% a.m.
Prazo	4 meses
Prestação mensal	**R$ 1.313,12**

mês	juros	prestação	amortização	dívida atual
0				**5.000,00**
1	**100,00**	**1.313,12**	**1.213,12**	**3.786,88**
2	**75,74**	**1.313,12**	**1.237,38**	**2.549,50**
3	**50,99**	**1.313,12**	**1.262,13**	**1.287,37**
4	**25,75**	**1.313,12**	**1.287,37**	**zero**

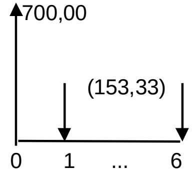
6)

Principal	R$ 1.000,00
Taxa de juros	6% a.m.
Prazo	4 meses
Prestação mensal	**R$ 288,59**

mês	juros	prestação	amortização	dívida atual
0				**1.000,00**
1	**60,00**	**288,59**	**228,59**	**771,41**
2	**46,28**	**288,59**	**242,31**	**529,10**
3	**31,75**	**288,59**	**256,85**	**272,25**
4	**16,34**	**288,59**	**272,25**	**zero**

7)

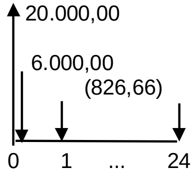
a- 0,19076 b- R$ 133,53 c-



8)

a- R$ 6.000,00 b- R$ 14.000,00 c- 0,05905 (considerando o valor financiado)

d- R$ 826,66 e-



9) R$ 56,35

10) R$ 544,00

11) 0,08377

12) 0,06467

13)

prazo	coeficiente
1	1,00000
2	0,50000
3	0,33333
4	0,26262
5	0,21216
6	0,17853
7	0,15451
8	0,14246
9	0,12843
10	0,11723
11	0,10808
12	0,10046

prazo	coeficiente
13	0,10968
14	0,10428
15	0,09963
16	0,09558
17	0,09204
18	0,08892
19	0,08615
20	0,08368
21	0,08146
22	0,07947
23	0,07767
24	0,07604

14) Prazos 13 e 14: As prestações dos mesmos são maiores do que as do prazo de 12 meses, o que significa um descuido na elaboração da tabela. Isso ocorreu porque houve uma mudança muito brusca entre os prazos 12 e 13 meses no que se refere à taxa cobrada (de 3% a.m. para 5,5% a.m.). Observe que entre os prazos 7 e 8 meses também houve mudança na taxa de juros (de 2% a.m. para 3% a.m.), só que mais suave, o que não comprometeu a coerência da tabela de coeficientes.

15) 5,97% a.m.

16) 6,60% a.m.

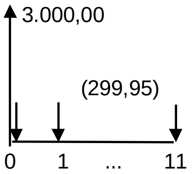
17) 7,50% a.m.

18) R$ 262,35

19)

a- R$ 299,95

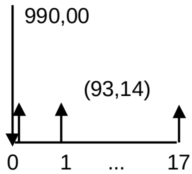
b-



20)

a- R$ 93,14

b-



21) 0,10637

22) 25,96% a.m.

23) 3,85% a.m.

24) 5,00% a.m.

25)

a- (na página seguinte)

b- Os resultados acima são menores do que os obtidos no exercício 13; ainda que as taxas de juros sejam as mesmas, o valor financiado agora é menor, devido à prestação paga como entrada (modo *begin*).

c- Prazos 13 e 14.

26)

a- R$ 235,33

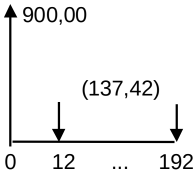
b- 0,29416

27)

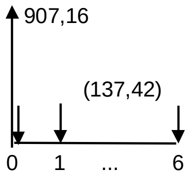
a- 12 dias

b- R$ 137,42

c-



d-



25) a-

prazo	coeficiente
1	1,00000
2	0,50000
3	0,33333
4	0,25747
5	0,20800
6	0,17503
7	0,15148
8	0,13831
9	0,12469
10	0,11382
11	0,10493
12	0,09754

prazo	coeficiente
13	0,10397
14	0,09884
15	0,09443
16	0,09060
17	0,08724
18	0,08428
19	0,08166
20	0,07932
21	0,07722
22	0,07533
23	0,07362
24	0,07207

28) 0,13129

29) 2 meses

30) 3 meses

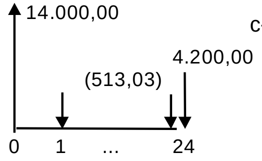
31) 1 mês

32) 15 meses

33) 24 meses

34)
a- R$ 513,03

b-



c- 76,93%

35)
a- 6,50% a.m.

b- R$ 105,85

36)

Mês	Prestação
1	833,00
2	837,54
3	849,71
4	855,37

37)a- 3,18%
c- 1,44%

b- 1,03%
d- 2,13%

38)
a- R$ 1.113,78
b- US$ 905,52
d- 66,67%

c-

Mês	Prestação
1	1.213,39
2	1.412,60
3	1.711,42
4	1.856,31

7. INVESTIMENTOS

7.1 INTRODUÇÃO

No capítulo anterior, estudamos como são calculados os parcelamentos que, em sua maioria, podem ser considerados formas que as instituições financeiras encontram de fazer aplicações e investirem no crescimento econômico do país, através do incentivo ao consumo. Vamos agora estudar o aspecto complementar destas operações, que são os recursos de captação dessas mesmas empresas, o que para o cidadão comum são considerados investimentos. Assim, vamos estudar os cálculos envolvidos na caderneta de poupança, nos CDBs, nos títulos públicos, nas debêntures e nos fundos mútuos.

Uma instituição financeira, seja ela pública ou privada, necessita de captar recursos no mercado a baixas taxas para que possa empregá-los, isto é, emprestá-los, a taxas competitivas, obviamente maiores, o que melhora seu spread ou lucro. Este é definido pela diferença entre a taxa emprestada e a taxa captada. Com isso, suas debêntures podem pagar juros mensais de 2,5%, mas os mutuários que contraem dívidas com esta instituição pagam juros mensais bem maiores, por exemplo, de 8% a.m.. Assim, seu spread será de 5,5% a.m. (8% - 2,5%), desde que tais operações (captação e empréstimo) estejam casadas no tempo.

7.2 TBF, TR E POUPANÇA

Dissemos na seção 6.19 que a TR (Taxa Referencial de Juros) é calculada com base na taxa média mensal de CDBs (Certificados de Depósitos Bancários) do dia, a chamada TBF (Taxa Básica Financeira). Assim, uma taxa de redução (redutor da TR) é aplicada sobre a TBF, dando origem à TR. A partir da TR, aumenta-se 0,50% e é obtido com isso o rendimento para a caderneta de poupança. Vamos tornar isso mais claro através de um exemplo.

Exemplo 7.1

A TR do período de 10 de janeiro de 2.001 a 10 de fevereiro de 2.001 foi calculada em 0,1571%. Qual será o rendimento da caderneta de poupança para este período?

Solução:

Vamos imaginar o que ocorre com um capital de R$ 100,00 corrigido pela TR:

Pressione	Visor	Significado
f 4	0,0000	4 casas visíveis
100 ENTER	100,0000	valor inicial
0.1571 % +	100,1571	valor corrigido pela TR
0.5 % +	100,6579	valor corrigido poupança

tabela 7.1

Para o capital de R$ 100,00, o valor corrigido pela TR é 0,1571% superior, isto é, R$ 100,1571. Para calcular o valor corrigido pela poupança, aplicamos 0,50% sobre este último e obtemos R$ 100,6579 e, com isso, o índice de rendimento da poupança: ***0,6579***. *Um procedimento com qualquer outro capital diferente de R$ 100,00 tornaria mais complicada a obtenção deste valor.*

7.3 Exercícios

1) A TR do período mensal de 17 de janeiro a 17 de fevereiro de 2.001 foi calculada em 0,1437%. Obtenha o rendimento da caderneta de poupança para este período.

2) A caderneta de poupança rendeu 0,6376% no período mensal de 1º de janeiro a 1º de fevereiro de 2.001. Qual foi a *TR* do período?

7.4 Taxa Média da Poupança

Vimos que o rendimento da caderneta de poupança está atrelado à taxa de negociação dos CDBs pelos bancos, variando por isso a cada dia. Atualmente (janeiro de 2.001), este rendimento é divulgado dois dias após a aplicação, sendo calculado a partir da TR. No entanto, a fim de previrmos qual será o montante após uma série de depósitos em caderneta de poupança, durante certo período, convém estimar uma taxa média de rendimento, para ser aplicada em todos os meses. Tal taxa média de rendimento, incidindo ao longo do período, provocaria o mesmo efeito das taxas individualmente.

Exemplo 7.2
Qual a taxa média de rendimento para a caderneta de poupança para o último trimestre de 2.000, considerando o primeiro dia de cada mês?

período	outubro	novembro	dezembro
rendimento (%)	0,6323	0,6203	0,5996

tabela 7.2

Solução:
A taxa média, aplicada três vezes consecutivas, provocaria o mesmo efeito que as três anteriores. Podemos calculá-la a partir do montante produzido por um capital de R$ 100,00:

Pressione	**Visor**	**Significado**
100 ENTER	100,0000	capital principal
0.6323% +	100,6323	montante após o 1º mês
0.6203% +	101,2565	montante após o 2º mês
0.5996% +	101,8637	montante após o 3º mês
f CLEAR FIN	101,8637	limpeza dos registradores
FV	101,8637	valor futuro
3 n	3,0000	período
100 CHS PV	-100,0000	valor presente
i	0,6174	taxa média mensal

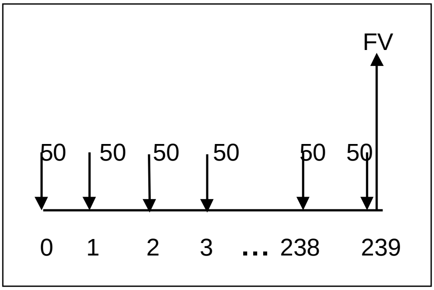
tabela 7.3

Logo, a taxa média de rendimento do trimestre é de 0,6174% a.m..

7.5 Poupança a Longo Prazo

A caderneta de poupança se mostra uma boa opção, quando encarada como investimento de longo prazo com depósitos periódicos. Além da segurança de recebimento do dinheiro, a sucessiva incidência de taxas sobre o capital corrigido e a entrada contínua dos depósitos elevam o montante de forma significativa e até mesmo surpreendente.

Exemplo 7.3
Depósitos de R$ 50,00 serão feitos mensalmente a partir de hoje ao longo de 20 anos (240 depósitos). Qual deverá ser o montante no mês do último depósito, se usarmos uma taxa média de poupança projetada de 0,65% a.m.?
Solução. O diagrama de fluxos de caixa para o problema será:



quadro 7.1

Usando os registradores financeiros da HP-12C, temos que deixá-la no modo **END** porque o saldo que se deseja saber é no mês do último depósito. Caso se necessitasse saber o saldo 1 mês após o último depósito, o modo correto seria **BEGIN**.

Pressione	**Visor**	**Significado**
g END	(modo END)	FV no mês do último depósito
f CLEAR FIN	(mantido)	limpeza dos registradores
50 CHS PMT	-50,00	valor dos depósitos mensais
0.65 i	0,65	valor da taxa mensal projetada
240 n	240,00	número de depósitos
FV	28.729,68	saldo após 240 meses

tabela 7.4

Observe que, serão efetuados 240 depósitos de R$ 50,00, totalizando R$ 12.000,00 nominais (240 x R$ 50,00). Assim, o montante é cerca de 139% maior que o nominalmente depositado, o que indica que a poupança, quando encarada a longo prazo, é um bom negócio. Além disso, sobre ela não há incidência de IR nem de IOF.

7.6 Exercícios

3) A tabela abaixo mostra os rendimentos da caderneta de poupança para 6 meses (valores fictícios):

Período	Rendimento (%)
5 jul a 5 ago	1,0856
5 ago a 5 set	1,1206
5set a 5 out	1,2001
5 out a 5 nov	1,1987
5 nov a 5 dez	1,2294
5 dez a 5 jan	1,3455

tabela 7.5

Calcular:
a) o rendimento semestral acumulado;
b) o rendimento médio mensal.

4) Depósitos de R$ 100,00 serão feitos mensalmente a partir de hoje ao longo de 5 anos (60 depósitos). Que percentual o montante no mês do último depósito representa sobre a soma dos depósitos nominais, se usarmos uma taxa média de poupança projetada de 0,65% a.m.?

5) Depósitos de R$ 100,00 serão feitos mensalmente a partir de hoje ao longo de 10 anos (120 depósitos). Que percentual o montante no mês do último depósito representa sobre a soma dos depósitos nominais, se usarmos uma taxa média de poupança projetada de 0,65% a.m.?

6) Depósitos de R$ 100,00 serão feitos mensalmente a partir de hoje ao longo de 20 anos (240 depósitos). Que percentual o montante no mês do último depósito representa sobre a soma dos depósitos nominais, se usarmos uma taxa média de poupança projetada de 0,65% a.m.?

7.7 Certificado de Depósito Bancário

Mais conhecido por CDB. Trata-se de um título emitido pelos bancos comerciais, de investimento e de desenvolvimento para captação de recursos. O título é prefixado por 30 ou mais dias, e seu titular pode renegociá-lo mediante endosso. Sua taxa é efetiva e anual, sendo bastante vantajosa para grandes quantias (acima de R$ 100.000,00).

Exemplo 7.4
Um CDB de 34 dias rende 35,00% a.a.. Calcular:
a) a taxa efetiva do período;
b) a taxa ganha pelo aplicador, após desconto de 20% sobre os rendimentos brutos para o IR.
Solução:
*a) Antes de utilizar os registradores financeiros da HP-12C, devemos nos perguntar: um ano comercial (360 dias) possui quantos períodos de 34 dias? A resposta será obtida dividindo-se 360 por 34, o que será a nossa variável **n**. **PV** poderá ser o capital de R$ 100,00 e **FV** será **35%** a mais, isto é R$ 135,00. Assim, deveremos descobrir o valor de **i**:*

Pressione	Visor
f CLEAR FIN	(mantido)
100 CHS PV	-100,00
135 FV	135,00
360 ENTER 34 ÷ n	10,59
i	2,87

tabela 7.6

*Logo, a taxa efetiva do período é de 2,87% para 34 dias. Observação: o indicador **C** deverá estar ativo no visor da máquina. Para ativá-lo, pressione **STO EEX**.*

b)

Pressione	Visor
RCL i	2,87
20 % -	2,30

tabela 7.7

Assim, a taxa ganha pelo aplicador será de 2,30% para 34 dias, considerando o desconto para o IR.

7.8 Exercícios

7) Um CDB paga juros de 2,43% para o prazo de 34 dias. Calcule:
a) a taxa anual efetiva de juros;
b) o ganho líquido do investidor, descontados os 20% sobre os rendimentos brutos para o IR.

8) Um CDB de 48 dias que paga 4,35% de juros no período é renegociado 10 dias depois, a 101% do valor inicialmente pago. Calcule:
a) a taxa anual efetiva;
b) o ganho mensal líquido do segundo comprador, descontados 20% dos rendimentos brutos para o IR.

7.9 Títulos Públicos

Quando estudamos os juros simples, enriquecemos seu capítulo com os títulos da dívida externa do Brasil e de outros países (seção 3.11). A característica destes títulos é que são de longo prazo, podendo até chegar a 30 anos. Por outro lado, existem os títulos de curto prazo, que, juntamente com as ações nas bolsas de valores, compõem o chamado mercado de capital especulativo. Tais títulos podem ou não ser indexados ao dólar e o governo pode negociá-los com altas taxas para atrair o capital estrangeiro para o Brasil. Logo após o calote da Rússia (1998), por exemplo, temendo que o investidor retirasse dinheiro do país, o Brasil elevou sua taxa básica da economia, taxa Selic, a 49 % a.a.. Em janeiro de 2.001, a taxa Selic está em 15,25% a.a.. Acompanhe dois exemplos ilustrativos da matemática envolvida em tais títulos.

Exemplo 7.5

Uma LTN (Letra do Tesouro Nacional) paga juros simples de 29% a.a. e seu vencimento será daqui a 15 dias. Calcule:
a) seu preço unitário;
b) a taxa mensal composta de investimento do comprador.

Solução:

a) Fazendo uma regra de três:

ganho		**prazo**		
29%	———	360 dias		
x	———	15 dias	$\Rightarrow$	x = 1,21% em 15 dias

quadro 7.2

Assim, o ganho do comprador será de 1,21% sobre o que aplicou. A cada R$ 100,00 ganhos, o aplicador terá investido o PU:

R$	**%**		
100,00	101,21		
PU	100,00	⇒	PU = 98,81

quadro 7.3

Logo, PU = R$ 98,81.

b)

Pressione	**Visor**
f CLEAR FIN	98,81
CHS PV	-98,81
100 FV	100,00
15 ENTER 30 ÷ n	0,50
i	2,43

tabela 7.8

Logo, o ganho será de 2,43% a.m..

Exemplo 7.6

Uma LBC (Letra do Banco Central) paga juros simples de 10% a.a. mais a variação cambial e tem o prazo de 20 dias. Calcule:

a) sua taxa em 20 dias;

b) se o valor de aquisição foi de R$ 100,00 e a variação cambial do período de 37,6%, o valor de resgate;

c) a taxa mensal composta do investimento.

Solução:

a) Através da regra de três:

ganho	**prazo**		
10%	360 dias		
x	20 dias	⇒	x = 0,56% em 20 dias

quadro 7.4

b)

Pressione	Visor
f CLEAR FIN	0,56
100 +	100,56
37.6 % +	138,36

tabela 7.9

Logo, o valor de resgate será de R$ 138,36.

c)

Pressione	Visor
f CLEAR FIN	138,36
FV	138,36
100 CHS PV	-100,00
20 ENTER 30 ÷ n	0,67
i	62,76

tabela 7.10

Assim, o rendimento mensal composto é de 62,76% a.m..

Observamos, então, que o regime considerado no cálculo das taxas é o simples, embora seja vital o cálculo da taxa composta equivalente para efeitos de comparação com taxas atuais.

7.10 Exercícios

9) Num leilão do Banco Central, foi adquirido uma *LTN* que paga juros simples de 40% a.a., 12 dias de prazo de vencimento:
a) calcule a taxa do período;
b) calcule a taxa mensal composta correspondente;
c) calcule o PU de tal título;
d) calcule o deságio da transação.

10) Num leilão do Banco Central, foi adquirido uma LBC que paga juros simples de 13% a.a. mais a variação do dólar, com prazo de 18 dias.
a) calcule a taxa do período;
b) se o valor negociado foi de R$ 100,00, e a variação do câmbio do período ficou em 4,56%, calcule o valor de resgate do título;

c) a taxa mensal efetiva composta do ganho.

11) Um C-bond de 30 anos foi negociado com deságio de 30%, logo após o antigo dono ter descontado sua 5ª parcela anual de juros. Se o título paga 12% a.a. de juros, calcule a taxa de investimento composto para o comprador.

12) Um título da dívida externa mexicana paga juros de 15% a.a. e foi negociado a 9 anos exatos de seu resgate com ágio de 3%. Qual o investimento anual composto para o comprador?

7.11 Debêntures

Quando uma empresa de capital aberto precisa de dinheiro e considera as taxas de juros do mercado muito altas, ela poderá emitir *debêntures*, que são títulos com reembolsos periódicos. Vamos exemplificar:

Exemplo 7.7

Uma debênture de R$ 100,00 com um ano de prazo paga juros de 12% a.a. em cupons trimestrais. Se foi negociada com deságio de 3%,

a) determine seu diagrama de fluxos de caixa;

b) calcule a taxa trimestral efetiva do financiamento.

Solução:

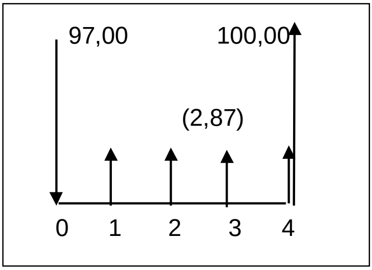
a)

Inicialmente, calculamos o valor pago pela debênture:

Pressione	Visor	Significado
100 ENTER	100,00	valor principal
3 % -	97,00	valor negociado
f CLEAR FIN	97,00	limpeza dos registradores
100 CHS PV	-100,00	valor principal
112 FV	112,00	valor mais juros anuais
4 n	4,00	prazo em trimestres
i	2,87	taxa de remuneração

tabela 7.11

Como o valor principal é R$ 100,00, segue que a taxa trimestral de remuneração equivale numericamente à própria remuneração trimestral em reais. Assim:



quadro 7.5

b)

O modo a ser considerado é o ***END****, pois o valor futuro corresponde ao mês do último* ***PMT****:*

Pressione	Visor
f CLEAR FIN	(mantido)
97 CHS PV	-97,00
2,87 PMT	2,87
100 FV	100,00
4 n	4,00
i	3,69

tabela 7.12

Logo, a taxa é 3,69% a.t..

7.12 Exercícios

13) Uma debênture de R$ 500,00 com dois anos de prazo paga juros de 10% a.a. em cupons trimestrais. Se foi negociada com deságio de 4%,

a) determine seu diagrama de fluxos de caixa;

b) calcule a taxa efetiva mensal do financiamento.

14) Uma debênture de R$ 2.000,00 paga cupons trimestrais de R$ 100,00 com prazo de 1 ano. Se foi adquirida com deságio de 5%,

a) calcule a taxa anual da debênture;
b) determine seu diagrama de fluxos de caixa;
c) calcule a taxa mensal do financiamento.

15) Uma debênture de R$ 1.500,00 paga cupons bimestrais de R$ 120,00 e tem o prazo de 2 anos. Se foi adquirida por R$ 1.450,00, calcule:
a) o deságio da operação;
b) a taxa anual da debênture;
c) o seu diagrama de fluxos de caixa;
d) a taxa mensal do financiamento.

7.13 Fundos Mútuos

Um pequeno investidor poderá ter acesso a grandes investimentos, e com isso, obter maiores ganhos, com os chamados fundos mútuos. A instituição que administra o fundo mútuo vende cotas para vários investidores e com a receita obtida adquire títulos, ações, ouro, entre outros e isto é chamado de carteira do fundo. A rentabilidade destes é repassada para o valor das cotas. Podemos dividir os fundos em dois tipos principais: os de renda fixa e os de renda variável.

Fundos de Renda Fixa

Os fundos de renda fixa são assim designados porque o valor de suas cotas nunca diminui. Suas carteiras normalmente são compostas de títulos federais (LFT, LBC, LTN, BBC) e privados (CDB, debêntures, letras de câmbio).

Exemplo 7.8

Um investidor adquiriu 500 cotas de um fundo de renda fixa quando a mesma estava a R$ 1,018932 por cota. 43 dias após, a cota foi valorizada para R$ 1,064552. Obtenha:
a) os valores investido e de resgate;
b) a taxa mensal do ganho do aplicador

Solução.

a) Basta multiplicar os valores das cotas por 500:

Investido: 500 x 1,018932 = R$ 509,47
Resgate: 500 x 1,064552 = R$ 532,28

quadro 7.6

b) Para obter a taxa mensal, é melhor trabalharmos com os valores das cotas:

Pressione	**Visor**
f CLEAR FIN	(mantido)
1.018932 CHS PV	-1,02
1.064552 FV	1,06
43 ENTER 30 ÷ n	1,43
i	3,10

tabela 7.13

Assim, a taxa do ganho é de 3,10% a.m..

Fundos de Renda Variável

A carteira destes fundos é composta de ações, dólar e ouro, além de títulos públicos e privados. Assim, suas cotas podem aumentar ou diminuir, conforme a valorização ou desvalorização dos integrantes de suas carteiras.

Exemplo 7.9

Um fundo de renda variável tem em sua carteira 30% de ouro. Se o mesmo valorizou, em 17 dias, 52% e se tal aumento for integralmente repassado para o fundo, qual será sua valorização:

a) no período;

b) mensal.

Solução:

a)

Em cada 100 cotas deste fundo, 30 cotas eqüivalem ao ouro. Se houve uma valorização de 52% do ouro e este for repassado integralmente para o fundo, teremos:

Pressione	**Visor**
30 ENTER 52% +	45,60
70 +	115,60

tabela 7.14

Logo, o fundo valorizou 15,60% no período (17 dias).

b)

Calculando a taxa equivalente mensal:

Pressione	Visor
f CLEAR FIN	115,60
FV	115,60
100 CHS PV	-100,00
17 ENTER 30 ÷ n	0,57
i	29,15

tabela 7.15

Assim, a valorização é de 29,15% a.m..

7.14 Exercícios

16) Qual a valorização de uma quota de um fundo de renda fixa que passou de R$ 0,456754 a R$ 0,491022 em 6 dias, expressa em:
a) taxa do período;
b) taxa mensal.

17) Um fundo de renda variável passou de R$ 0,678561 a R$ 0,621902 em 8 dias. Qual a taxa de desvalorização:
a) do período;
b) mensal.

18) Um fundo de commodities é um fundo de renda variável caracterizado por uma carteira bem diversificada, o que diminui os riscos de perdas. Suponha que um destes fundos apresenta 3% em dólar em sua carteira e o dólar tenha sofrido uma desvalorização de 20%. Calcule a desvalorização do fundo, caso a perda do dólar seja totalmente repassada para ele.

19) Certo fundo de renda variável é constituído de 40% das ações de uma empresa. Se as mesmas, em 19 dias, sofrerem uma desvalorização de 15% e as mesmas forem repassadas para o fundo, calcule sua desvalorização :
a) no período;
b) mensal.

20) Um fundo de renda fixa tem uma tributação de 30% para o IR. Se um título for adquirido quando a cota era de R$ 2,343987 e foi resgatado

39 dias depois quando a cota é de R$ 2,834211, calcule:
a) a taxa bruta do período;
b) a taxa líquida do período;
c) a taxa bruta mensal;
d) a taxa líquida mensal;
e) a taxa real mensal ganha, se a inflação do mês foi de 9,31%.

21) Um fundo de renda variável tem uma tributação de 25% para o IR. Se um título for adquirido quando a cota era de R$ 1,395432 e foi resgatado 44 dias depois quando a cota era de R$ 1,992134, calcule:
a) taxa bruta do período;
b) a taxa líquida do período;
c) a taxa bruta mensal;
d) a taxa líquida mensal;
e) a taxa real mensal ganha, se a inflação do mês foi de 9,31%.

7.15 RESPOSTAS

1) 0,6444%

2) 0,1369

3)
a- 7,3979%
b- 1,1966%

4) 119,38%

5) 148,96%

6) 237,45%

7)
a- 28,95% a.a.
b- 1,94% para 34 dias

8)
a- 37,62% a.a.
b- 7,55% a.m.

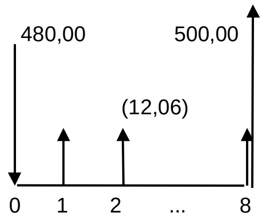
9)
a- 1,33% para 12 dias
b- 3,37% a.m.
c- $ 98,68
d- 1,32%

10)
a- 0,65% para 18 dias
b- R$ 105,24
c- 8,89% a.m.

11) 17,28% a.a.

12) 14,38% a.a.

13)
a-

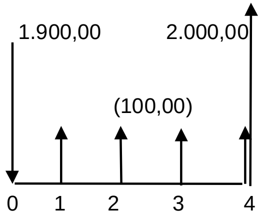


b- 0,98% a.m.

14)

a- 21,55% a.a.

b-



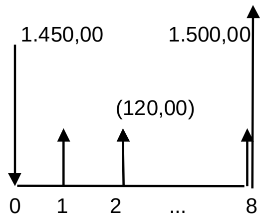
c- 2,11% a.m.

15)

a- 3,33%

b- 36,05% a.a.

c-



d- 2,79% a.m.

16)

a- 7,50%

b- 43,58% a.m.

17)

a- 8,35%

b- 27,89% a.m.

18) -0,60%

19)

a- 6%

b- 9,30% a.m.

20)

a- 20,91%

b- 14,64%

c- 15,73%

d- 11,08%

e- 1,62% a.m.

21)

a- 42,76%

b- 32,07%

c- 27,47%

d- 20,88%

e- 10,59%

Bibliografia

Livros

FARIAS, E.E.V. *Matemática Financeira para Executivos*. Porto Alegre: editora Ortiz, 1994.

HEWLETT-PACKARD. *HP-12C - manual do proprietário e guia para solução de problemas.* São Paulo: 1990.

KASSAI, J.R. e outros. *Retorno de Investimento - abordagem matemática e contábil do lucro empresarial.* São Paulo: Atlas, 1998.

PUCCINI, A. L. *Matemática Financeira Objetiva e Aplicada.* São Paulo: Saraiva, 1998.

SAMANEZ, C. P. *Matemática Financeira - Aplicações à Análise de Investimentos.* São Paulo: Makron Books, 1994.

Internet

JORNAL FOLHA DE SÃO PAULO. www.folha.com.br

JORNAL O ESTADO DE SÃO PAULO. www.estadao.com.br